



**УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“
– СКОПЈЕ**



**ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА
И ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ**

Институт за математика-физика

Марија Николовска

МОДЕЛИ НА LORENZ И НИВНА ПРИМЕНА

-магистерски труд-

Ментор: Проф. Д-р. Боро Пиперевски

Скопје, 2011 година

Марија Николовска

МОДЕЛИ НА LORENZ И НИВНА ПРИМЕНА

РЕЗИМЕ:

Математичкото моделирање на голем број научни и инженерски процеси се сведува на системи диференцијални равенки како контурен или граничен проблем.

При изучувањето на процесите во реалноста можат да се разграничат главно два приода, создавање физички модел и создавање симулационен модел. Кај физичкиот модел не е потребно познавање на соодветен математички апарат. Кај симулационен односно математички модел, е потребно големо познавање на математичка теорија бидејќи процесот треба да биде опишан со соодветни математички законитости. Скоро во сите области во последно време се користи математички модел за проучување и решавање на некој процес. Сепак со квалитативната теорија на диференцијалните равенки се проучуваат процесите преку еден идеализиран модел кој понекогаш може да не одговара на вистинскиот во природата.

Кај моделирањето на некој процес со математички модел секако не можат да се земат во предвид сите елементи. При тоа како последица може да се добие во некои случаи реален но и нереален резултат. Во математиката е проучуван овој проблем и се разрешува на повеќе начини од кои еден е линеаризација на системот. Со тоа проблемот се поедноставува но при тоа се изучува каква последица и во кои рамки ќе има соодветната постапка. Сите дисциплини од математиката кои се вклучени во однесувањето на соодветниот математички модел, се дел од теоријата на стабилност која денес наоѓа голема примена во сите процеси од разни области на техниката, термодинамиката, хидродинамиката, еволуционите процеси, биологијата, хемијата, екологијата и друго. Теоријата на стабилност има зачетоци во разрешувањето на проблемот околу работата на парната машина, стабилноста (статиката) на мостовите, периодичноста на непригушени осцилации, движењето на планетите и друго. Историски гледано зачетоците се појавуваат со Поанкаре (1854-1912), преку веќе класичните резултати на Љапунов (1857-1918), Понтрјагин и Андронов (1901-1952) со теоријата на бифуркации, Колмогоров со теоријата на мал параметар, Бендиксон и Арнолд. Во денешно време се повеќе се разработува теоријата на стабилност врз принципите поставени од наведените автори.

Од системите диференцијални равенки кои се конструираат врз основа на законитостите во некој процес кои сепак се констатираат експериментално, најмногу се изучени автономните системи. Освен аналитичкото решавање на системите диференцијални равенки во квалитативната теорија се користи и геометриската интерпретација со дефинирање фазен простор, така што секое решение е траекторија (крива) во просторот, но сепак најважна е кинематичката интерпретација при која секое решение е движење на точка вдоль крива. Значи основната задача на теоријата

на диференцијалните равенки е дефинирањето и истражувањето на движењето на системот вдоль вектоското поле на фазни брзини. Или со други зборови истражувањето на проблемот за видот на фазните криви и рамнотежните точки на системот (јазел, седло, фокус, центар), дали тие остануваат во ограничена област или неограничено растат (периодични, стабилни, нестабилни решенија).

Во магистерскиот труд, со користење на наједноставни модели првенствено поврзани со еволуционите процеси најпрво се дефинираат основните поими од теоријата на стабилност кај динамичките системи. Користејќи широк математички апарат, како делови од математичка анализа, алгебра и линеарна алгебра, се проучува однесувањето на математичките модели кои ги опишуваат реалните процеси, пред се стабилноста на системите и физичките процеси. Разгледана е врска меѓу нелинеарните системи и линеаризираниите, како поедноставна форма за изучување на истите. На крај, опишан е системот на Лоренц кој има доста голема примена во техниката, пред се за објаснување на појавата на турбуленции и останати појави опфатени во така наречената теорија на катастрофи. При тоа, поставени се и разрешени повеќе примери од различни области: електротехниката, медицината, биологијата, хемијата, екологијата и друго.

КЛУЧНИ ЗБОРОВИ:

фазен простор, фазна крива, векторско поле на фазни брзини, рамнотежни (стационарни или сингуларни) точки, стабилност на решението, фазен поток, бифуркации, атрактор.

СОДРЖИНА

1. Основни поими од теоријата на динамички системи	1
Вовед	1
Интегрални криви на полето на правци	3
Диференцијална равенка и нејзино решение	4
Еволуциона равенка со еднодимензионален фазен простор	5
Равенка на природно размножување (природен прираст)	5
Равенка на експлозија	6
Логистичка крива	7
Квоти на губитоци	9
Губитоци со променлива квота	10
Повекедимензионални фазни простори	11
Диференцијална равенка на системот ловец – жртва	11
Слободна честичка на права	14
Слободно паѓање	15
Мали осцилации	15
Математичко нишало	16
Одредување на типот на сингуларните точки	17
Извод по правец	24
2. Поим за еднопараметарска група линеарни трансформации	26
3. Линеарни динамички системи. Спектрална анализа	33
Општи поими	33
Комплексен случај	40
Класификација на сингуларните точки	44
Конструкција на функцијата на Љапунов	50
4. Основни поими од теоријата на <i>Ляпунов</i> за стабилност на динамички системи	52
Основни поими за стабилност на линеарни автономни системи. Спектрална анализа	53
Стабилност на линеарни автономни системи по Љапунов. Поим за дефинитни форми	57
Стабилност на нелинеарни автономни системи. Теорема на Љапунов	60
Модел на Лотка-Волтер. Скалило на Ламере	69
5. Бифуркации. Модели на Лоренц	73
Вовед	73
Основни поими	73
Еволуциони процеси	76
Бифуркации и стабилност на стационарни решенија на еднодимензионални еволуциони равенки	76
Класификација на точки од криви кои ги исцртуваат решенијата	77
Бифуркации во моделите за популации	78
Вовед во стабилноста и бифуркации во динамичките системи и флуидната механика	81
МОДЕЛИ НА ЛОРЕНЦ	89
Својства на Лоренцовиот систем	89
Заклучок	98

1. ОСНОВНИ ПОИМИ ОД ТЕОРИЈАТА НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Вовед

Поаѓајќи уште од самата дефиниција на извод и диференцирање на функција, знаеме дека изводот карактеризира некаква промена. Поради тоа, многу различни процеси во природата, кои се должат на некоја промена (а во сите процеси има некоја промена) може да се опишат со диференцијални равенки.

Теоријата на обични диференцијални равенки е еден од основните апарати на примената на математиката. Со помош на оваа теорија се изучуваат сите возможни еволуциони процеси кои се карактеризираат со детерминираност, конечнодимензионалност и диференцијабилност.

Дефиниција 1.1: За еден процес велиме дека е **детерминиран** ако врз основа на состојбата на процесот во сегашноста може еднозначно да се определи неговата состојба во минатото и да се предвиди неговата состојба во иднината. Множеството од сите возможни состојби на процесот се нарекува **фазен простор**.

Така на пример, класичната механика го разгледува движењето на системите чија иднина и минато се еднозначно определени со почетната положба и почетната брзина на секоја точка од системот. Фазен простор на механичките системи е множество чии елементи се паровите од положбата и брзината на секоја точка од дадениот систем.

Движењето на честици во квантната механика не може да се опише како детерминиран процес. Распространувањето на топлината е полудетерминистички процес: иднината е дефинирана со сегашноста, но минатото не е.

Дефиниција 1.2: Процесот се нарекува **конечнодимензионален** ако бројот на параметри кои се потребни за опишување на неговата состојба е конечен, т.е. неговиот фазен простор е конечнодимензионален.

На пример, во Њутновата механика таков е системот од конечен број материјални точки или тела, додека движењето на течности кое се изучува во хидромеханиката, процесот на треперење на жица и мембрана, распространување на бранови во оптика и акустика се примери на процеси кои не се опишуваат со помош на конечнодимензионален фазен простор.

Дефиниција 1.3: Процесот се нарекува **диференцијабилен** ако промената на состојбата од времето се опишува со диференцијабилни функции, т.е. неговиот фазен простор има структура на диференцијабилно многуобразие.

Детерминиран конечнодимензионален и диференцијабилен процес доведува до диференцијална равенка.

Движењето на системите во класична механика може да биде опишано со помош на обични диференцијални равенки, но во квантната механика, теоријата на топлопроводност, хидромеханиката, теорија на еластичност, оптиката, акустиката, теоријата на удари, не може.

Примери за еднодимензионални процеси кои може да се опишат со диференцијални равенки се процесот на радиоактивно распаѓање и процесот на размножување на бактерии (еволюциони процеси).

Видот на диференцијалната равенка на процесот како и самиот факт за детерминираност, конечнодимензионалност и диференцијабилност може да се утврди единствено експериментално што значи со некоја степен на точност. Според тоа кога се зборува за реални процеси кои се совпаѓаат со наши идеализирани модели секогаш треба да се има во предвид и оваа констатација. Идеализираниот математички модел приближно претставува реален процес и обратно, реалниот процес само приближно може да се претстави со математички модел.

За еден систем не е доволно да се знае само каде се наоѓа просторно, туку треба да се знае и како се движи. Според тоа, еден систем од n материјални точки ќе има димензија $6n$ (3 координати во простор и 3 компоненти за брзината на движење на секоја точка од системот).

Обично движењето на сите системи се опишува со движење на точките вдоль крива во фазниот простор. Брзината на движењето на фазна точка по таа крива ја определува самата точка. Значи во секоја точка од фазниот простор е зададен вектор, кој се нарекува **вектор на фазната брзина**. Сите вектори на фазна брзина образуваат **векторско поле на фазната брзина** во фазниот простор. Тоа векторско поле ја определува диференцијалната равенка на процесот (зависност на брзината на движење на фазните точки од нивните положби во текот на времето).

Основната задача на теоријата на диференцијалните равенки се состои во определување или испитување на движењето на системите во векторското поле од фазни брзини (се испитува видот на фазните криви, всушност траекториите на движењето на фазните точки: дали тие одат во бесконечност или остануваат во ограничена област). Компјутерите приближно ги наоѓаат решенијата на диференцијалните равенки во конечен временски интервал но не даваат одговор на квалитативните проблеми за однесувањето на фазните криви, а со тоа и на системите, во целост.

Поимот фазен простор изучувањето на еволюционите процеси го сведува на геометриски задачи за криви дефинирани со векторски полиња во координатен систем. При изучувањето на диференцијалните равенки ќе почнеме со следната геометриска задача.

Интегрални криви на полето на правци

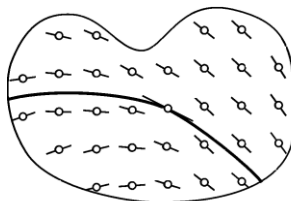
Поле на правци зададено во некоја област од рамнината е дефинирано со секоја точка од областа во која минува избрана права.

Забелешка 1.1. Две глатки криви кои минуваат низ една иста точка имаат во неа еднаков правец ако тие се допираат. Правецот на тие две криви е определен со тангентата на кривите во нивната допирна точка. Според тоа правите во дадено поле на правци може да заменат произволни глатки криви, со тангентата на кривата во таа точка.

Забелешка 1.2. Сите објекти ќе претпоставуваме дека се непрекинато диференцијабилни (глатки), а полето на правци ќе го нарекуваме глатко ако правите на полето глатко зависат од точките низ кои минуваат.

Забелешка 1.3. Аналогно се дефинира и поле на правци во n -димензионален простор (глатко многуобразие).

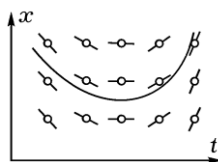
Дефиниција 1.4: Крива која во секоја своја точка за тангента ја има правата од полето на правци во таа точка, се вика **интегрална крива** на полето на правци.



Цртеж 1.1

Поле на правци и негова интегрална крива

Пример 1: На цртеж 1.2 е претставено непрекинатото поле на правци во рамнината кое се пресликува во себе при било која транслација вдолж некоја права и не содржи паралелни на неа правци.



Цртеж 1.2

Поле инваријантно во однос на вертикална транслација

Теорема 1.1: Задачата за наоѓање на интегралните криви на такво поле е точно задача на интегрирање на дадена непрекината функција. Ако $v(t)$ е дадена функција, тогаш $x=\varphi(t)$ е интегрална крива ако и само ако во секоја точка изводот на функцијата φ (коефициентот на правец на тангентата на интегралната крива) е еднаков на функцијата $v(t)$ т.е.

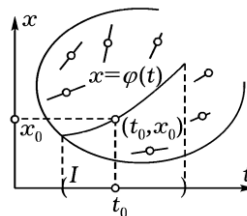
$$\varphi'(t) = v(t) \Leftrightarrow \varphi(t) = \int v(t)dt + C$$

Во општ случај со интегрирање не се добиваат интегралните криви, како на пример $v(x,t) = x^2 - t$ (Лиувил).

Диференцијална равенка и нејзино решение

Геометриската задача за добивање на интегрална крива аналитички се запишува како задача за добивање на решение на диференцијална равенка. Претпоставуваме дека полето на правци не содржи вертикални прави (паралелни со x -оската). Тогаш тангенсот од аголот кој го зафаќа секоја од правите со t -оската (коефициентот на правец), $v(t,x)$ е конечен и интегралните криви се јавуваат како графици на функцијата $x=\varphi(t)$.

Теорема 1.2: Нека е дадено векторско поле на правци $v(t,x)$. Нека φ е функција дефинирана на интервал $I=[a,b]$. Графикот на функцијата φ е интегрална крива ако и само ако за секое $t \in I$ е точно равенството $\varphi'(t)=v(t, \varphi(t))$.



Цртеж 1.3

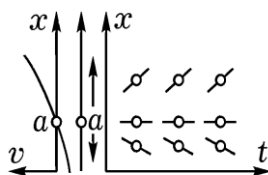
Секоја диференцијална равенка $x' = v(t,x)$ дефинира поле на правци во рамнина (и обратно). Во точката $M(t,x)$ тангентата (правата) има коефициент на правец (тангенс од аголот меѓу неа и t -оската) еднаков на $v(t,x)$.

Еднодимензионални фазни простори

Еволуциона равенка со еднодимензионален фазен простор

Диференцијална равенка која опишува еволуционен процес е равенката $x' = v(x)$ каде со десната страна $v(x)$ е зададено векторското поле на фазни брзини. Притоа, на точката x и соодветствува вектор $v(x)$.

Ваквата равенка каде $v(x)$ не зависи од t се вика **автономна**. Значи брзината на еволуцијата на автономен систем т.е. на систем кој е независен од други системи (надворешни влијанија) е определена само со состојбата на тој систем (не зависи од временски закони на природата). Точките во кои $v = 0$ се викаат **рамнотежни состојби** (стационарни или сингуларни точки) на векторското поле. Ако a е рамнотежна состојба тогаш $\varphi(t) \equiv a$ е партикуларно решение на диференцијалната равенка (константна функција). Тоа значи процес кој почнал во состојба a , во неа засекогаш останува. Очигледно е дека таа рамнотежна состојба е нестабилна: при мала промена на почетниот услов од рамнотежниот, фазната точка со тек на време ќе се оддалечува од рамнотежната состојба.



Цртеж 1.4

Векторско поле и поле на правци за равенката $x' = v(x)$

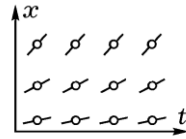
На цртежот е даден специјален случај за монотонно растечка функција $v(x)$ и $a > 0$. Нека $0 < a_2 < a < a_1$. Бидејќи $\varphi(t) \equiv a$ и $\varphi'(t) = v(t)$ ќе имаме: $v(a) = 0$, а бидејќи $v(x)$ е монотонно растечка функција, ќе имаме: $v(a_2) < v(a) = 0 < v(a_1)$. Ако $x = \varphi^*(t)$ е едно партикуларно решение така што $\varphi^*(t_0) = a_1$ и $\varphi^{*'}(t) = v(a_1) > 0$, тогаш и коефициентот на правец е позитивен. Ако пак $x = \varphi^{**}(t)$ е друго партикуларно решение така што $\varphi^{**}(t_0) = a_2$ и $\varphi^{**'}(t) = v(a_2) < 0$, тогаш и коефициентот на правец е негативен. Бидејќи v не зависи од t полето се пресликува само во себе при трансформација вдоль оската t .

Полето на правци може да се исцрта геометриски со вектори со координати $(1, \varphi'(t)) = (1, v(x))$ во точката $M(x, t)$.

Равенка на природно размножување (природен прираст)

Нека големината на определена биолошка популација (на пример количеството бактерии во една чаша или количеството риби во еден рибник) е еднаква на x и нека претпоставиме дека брзината на размножување (прирастот) е пропорционална на моменталното количество на единки. Оваа претпоставка апроксимативно е точна додека има доволно храна. Вака дефинираниот процес се опишува со диференцијална равенка на природно размножување $x' = kx$, $k > 0$. Според природата на задачата, $x > 0$ (јасно е дека количеството е позитивно) и $x' > 0$

(бидејќи $k > 0$) што значи дека x е монотонно растечка функција, т.е. x расте со растењето на t (со текот на времето се зголемува бројот на единици). Сепак е неизвесно дали x за конечно време ќе достигне бесконечна вредност (дали постои вертикална асимптота на интегралната крива) или ќе остане конечно за целото време, т.е. за сите t .



Цртеж 1.5

Равенка на природен прираст $x' = kx$

Исто така е нејасно дали интегралната крива тежи кон оската $x=0$ кога t тежи кон конечна негативна граница (минато) или кон бесконечност $(-\infty)$. Оваа диференцијална равенка лесно се решава:

$$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \frac{dx}{x} = k dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t k dt \Rightarrow \ln x - \ln x_0 = k(t - t_0) \Rightarrow \ln \frac{x}{x_0} = k(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{k(t-t_0)} = \frac{x}{x_0} \Rightarrow x = e^{k(t-t_0)} x_0$$

Од овде гледаме дека кога $t \rightarrow +\infty$ тогаш и $x(t) \rightarrow +\infty$ (експоненцијално); а кога $t \rightarrow -\infty$ тогаш $x(t) \rightarrow 0$, па x не достигнува ниту конечна нулта, ниту бесконечна вредност при конечно t (овие вредности x ги достигнува само за бесконечна вредност на t).

Интересно е дека за дуплирање на количеството е потребно секогаш исто време независно од неговото почетно количество. На пример за населението на Земјата тој период е 40 години.

Кога $k < 0$ процесот е радиоактивно распаѓање и $T = k^{-1} \ln 2$ (всушност за секој процес k е карактеристика). Висината на која густината на воздухот двојно се намалува е $8 \ln 2 \sim 5,6$ km.

Да забележиме дека $v(x) = kx$ е линеарна функција.

Равенка на експлозија

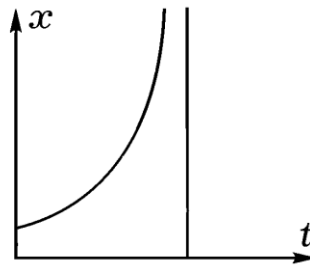
Да претпоставиме дека брзината на зголемување на бројот на единици не е пропорционална на моменталниот број на единици, туку на вкупниот број на парови единици. Тогаш соодветната диференцијална равенка ќе биде: $x' = kx^2$ ($= kx \cdot x$). Во тој случај за поголемо x зголемувањето ќе биде побрзо од природното зголемување, а за помало x побавно (оваа ситуација се среќава скоро во сите физичко-хемиски задачи, каде брзината на реакција е пропорционална на концентрацијата на двата реагенси). Впрочем во оваа време на китови на некои видови им е тешко да најдат

за себе партнер, бидејќи размножувањето на китовите се опишува точно со равенката $x' = kx^2$ при што x е мало. Полето на правци во овој случај наизглед малку се разликува од полето на правци во случајот на природното размножување но испитувањата покажуваат дека интегралните криви се однесуваат сосема различно.

Ако претпоставиме дека $k=1$, за решението на диференцијалната равенка се добива:

$$x' = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow dt = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow t = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow x = -\frac{1}{t - C}$$

Решението има смисла за $t < C$, бидејќи x е количество и треба да важи $x > 0$. Интегралните криви се полови хиперболи. Хиперболата има вертикална асимптота, во случајот правата $t = C$.

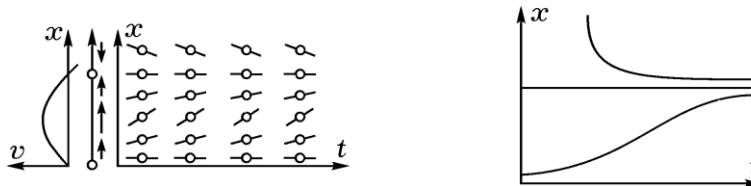


Цртеж 1.6
Равенка на експлозија $x' = x^2$

Значи ако прирастот на населението е пропорционален на парот, тогаш бројот на населението ќе биде бесконечно голем за конечно време. Физички таков резултат одговара на експлозивниот карактер на процесот (се разбира за t доволно блиску до C , идеализирано кажано, земено при опишувањето на процесот со диференцијална равенка, инаку во реалноста тоа е неприфатливо бидејќи реалната количина на население за конечно време не постигнува бесконечна вредност).

Логистичка крива

Диференцијалната равенка на природното размножување $x' = kx$ е прифатлива само во случаите кога бројот на единици не е премногу голем. Со зголемувањето на бројот на единиците поради храната (конечно ограничено количество) конкуренцијата придонесува да се намали брзината на прирастот. Едноставната претпоставка која ќе придонесе за разрешување, односно упростување на овој случај се состои во тоа што коефициентот k треба да зависи од x како линеарна нехомогена функција (за не толку големо x секоја глатка функција може да се апроксимира со линеарна нехомогена функција): $k = a - bx$. На тој начин доаѓаме до диференцијална равенка на природно размножување земајќи ја во предвид и конкуренцијата: $x' = (a - bx) \cdot x$. За вредноста на коефициентите a и b може да избереме да биде $a = b = 1$ со што ја добивме *логистичката равенка*: $x' = (1 - x) \cdot x$. Векторското поле на фазните брзини v и полето на правци во рамнината (t, x) се дадени на цртежот 1.7.



Цртеж 1.7

Векторско поле, поле на правци и интегрални криви на равенката $x'=(1-x) \cdot x$

При тоа треба да имаме во предвид дека $x > 0$, а $v(x)$ е функцијата $v(x)=(1-x)x$.

Со решавање на оваа диференцијална равенка, т.е. на равенката $x'=(1-x) \cdot x$ ги добиваме решенијата:

$$e^t = x(1-x)^{-1} \text{ кога } 0 < x < 1, \text{ т.е. } x = \frac{e^t}{e^t + 1}$$

$$e^t = x(x-1)^{-1} \text{ кога } x > 1, \text{ т.е. } x = \frac{e^t}{e^t - 1}$$

и според нив се скицирани двете интегрални криви. Значи можеме да заклучиме дека

- 1) Процесот има две рамнотежни положби : $x=0$ и $x=1$ (точките во кои $v = 0$)
- 2) Меѓу точките 0 и 1 полето е насочено од точката 0 кон точката 1, а и при $x > 1$, кон точката 1.

Според тоа рамнотежната состојба 0 е нестабилна (првобитното население почнува да се зголемува) додека рамнотежната состојба 1 е стабилна.

Да заклучиме дека при било која почетна состојба $x > 0$, со тек на време процесот влегува во стабилна рамнотежна состојба $x=1$. Од тие причини е нејасно, сепак, дали тој резултат следува (произлегува) за конечно или бесконечно време. т.е. имаат ли интегралните криви кои се наоѓаат во областа $0 < x < 1$, заеднички точки со правата $x=1$? Може да се покаже дека такви заеднички точки нема и дека интегралните криви асимптотски тежат кон правата $x=1$ кога $t \rightarrow +\infty$ и кон правата $x=0$ кога $t \rightarrow -\infty$. Тие криви се викаат **логистички криви**. Значи логистичката крива има две хоризонтални асимтоти ($x=0$, $x=1$) и го опишува преминот од една состојба

(0) во друга (1) за бесконечно време. За $0 < x < 1$: $x = \frac{e^t}{e^t + 1}$; а за $x > 1$: $x = \frac{e^t}{e^t - 1}$.

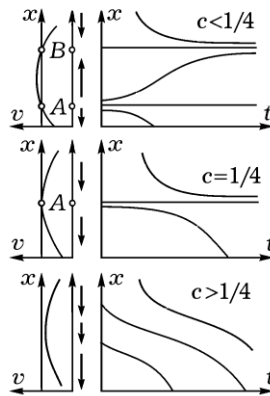
Бидејќи во случајот кога $x > 1$, ако $t \rightarrow 0$ тогаш $x \rightarrow +\infty$ заклучуваме дека интегралната крива $x(t)=\varphi(t)$ има вертикална асимтота за $t = 0$.

За мали вредности на x логистичката крива практично не е различна од експоненцијалната т.е. конкуренцијата малку влијае на растењето (зголемувањето) на популацијата. Но колку повеќе се зголемува x таа постанува неекспоненцијална и во близина на $x = \frac{1}{2}$ (оваа точка е точно превојната точка на кривата) експоненцијалната крива остро преминува на патот на логистичката; понатаму

логистичкиот прираст го означува заситувањето на системот т.е. влегувањето на системот во рамнотежен режим ($x=1$).

Квоти на губитоци

До сега разгледувавме слободна популација, која се размножува според внатрешните закони, без надворешни влијанија. Сега да претпоставиме дека покрај тоа што се намалува брзината на прирастот поради ограниченото количество на храна, уште и се одлива (губи) дел од популацијата (на пример ако ловиме риба од рибник или од океан). Да претпоставиме дека брзината на губитоци е константна. На овој начин ја добиваме диференцијалната *равенка на губитоци* $x'=(1-x)x - c$. Величината c ја карактеризира брзината на губитоци и се нарекува **квота**. Видот на векторското поле и полето на фазни брзини при различни вредности на брзината на губитоци c е прикажана на црт.1.8.



Цртеж 1.8

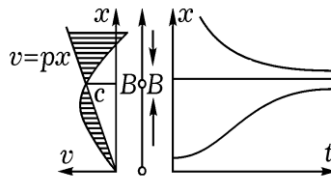
Векторско поле, поле на правци и интегрални криви на равенката на губитоци $x'=(1-x)x - c$

Рамнотежните состојби ($x'=0$) ги добиваме за вредностите $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$. Можеме да видиме дека при не толку голема брзина на губитоци ($0 < c < 1/4$) постојат две рамнотежни состојби (A и B). Помалата рамнотежна состојба ($x=A$) е нестабилна. Ако поради било кои причини, во некој момент количеството на популацијата се спушти помалку од A, тогаш понатаму целата популација за конечно време ќе изумре (исчезне). Поголемата рамнотежна состојба B е стабилна – тоа е стационарен режим во кој влегува популацијата при константни губитоци c . Ако $c > 1/4$, тогаш рамнотежата ја нема (не постојат решенија на равенката $x'=0$ во множеството на реални броеви) и целата популација ќе исчезне за конечно време. За $c=1/4$ имаме една нестабилна рамнотежна состојба ($A=B=1/2$). Губитокот со таква брзина при доволно голем првобитен број на популацијата математички евозможен во тек на доволно долго време, но сепак при доволно мала осцилација близу до бројот кој ја доведува

популацијата под рамнотежната состојба, доаѓа до комплетно исчезнување на популацијата за конечно време. Според тоа иако теоретски е возможно било која квота да се земе сосема близу до максималната ($c \leq 1/4$), максималната квота $c=1/4$ доведува до нестабилност и е недозволива. Уште повеќе практички се недозволиви и квоти блиски до $1/4$, бидејќи за нив опасниот праг A е близок до констатираниот режим B (мали случајни осцилации ја носат популацијата под прагот A , после кој популацијата исчезнува). Се покажува сепак дека е возможно да се организираат губитоците така што стабилно се добива улов со брзина $1/4$ за единица време (подобро не може да се добие бидејќи $1/4$ е максималната брзина на размножување на популацијата).

Губитоци со променлива квота

Сега ќе разгледаме случај во кој наместо константна брзина на губитоци, се јавува променлива брзина: $x'=(1-x)x-px$. Видот на векторското поле и интегралните криви (за $p < 1$) се дадени на цртеж 1.9.



Цртеж 1.9
Равенка на губитоци $x'=(1-x)x-px$

Помалата нестабилна рамнотежна состојба сега е во точката $x=0$, а втората рамнотежна состојба B се добива за $x=1-p$ и е стабилна за било кое p , $0 < p < 1$. После некој период соодветната популација ќе влезе во стационарен режим $x=B(=1-p)$. Апсолутната брзина на губитоци ќе биде констатирана за $c=pB$. Тоа е ордината на пресечната точка на функциите $v=(1-x)x$ и $v=px$. Да го испитаме однесувањето на таа величина c при промена на p ($c=pB=p(1-p)$). При мали соодветни губитоци (мало p) констатираме дека соодветната брзина на губитоци е исто така мала, а и кога $p \rightarrow 1$ таа исто така тежи кон нула (пресврт во губитоците). Најголемата вредност на апсолутната брзина c е еднаква на најголемата ордината на графикот на функцијата $v=(1-x)x$. Таа се достигнува кога правата $v=px$ поминува низ врвот на параболата (т.е. при $p=1/2$) и е еднаква на $c=1/4$. Избираме $p=1/2$, т.е. ја означуваме релативната квота така што соодветната популација составува половина. Ние достигнавме со тоа максимално возможна стационарна брзина $c=1/4$ при што системот останува стабилен.

Повеќедимензионални фазни простори

До сега фазниот простор беше еднодимензионален но во посложени случаи (на пример при изучувањето на процес со взаемно дејство меѓу неколку популации) се среќаваме со повеќедимензионални фазни простори.

Нека v е векторско поле во областа U од n -димензионален фазен простор. Автономната диференцијална равенка зададена со полето v е равенката $x' = v(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. **Решение** на оваа равенка се нарекува глаткото пресликување $\varphi: I \rightarrow U$ од интервал I од оската на времето, во фазниот простор, за кое важи равенството:

$\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi(t))$ за секое $t \in I$. Сликата на пресликувањето φ се нарекува **фазна крива**,

а графикот на пресликувањето φ се нарекува **интегрална крива**. Интегралната крива лежи во директниот (Декартов) производ на оската на времето и фазниот простор кој се нарекува проширен фазен простор со димензија $n+1$. Решението φ кое го задоволува почетниот услов $\varphi(t_0) = x_0$ дефинира интегрална крива која минува низ точката (t_0, x_0) .

Значи интегралните криви можат да се опишат со помош на полето на правци во проширениот фазен простор. Сепак тангенсот од аголот дефиниран со правците (меѓу соодветната права и апсисната оска) се заменува со следната конструкција.

Нека е дадено полето правци во областа $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и нека правците никаде не се вертикални (паралелни со \mathbb{R}^n). Нека t е координата во \mathbb{R} , $x = (x_1, \dots, x_n)$ во \mathbb{R}^n . Тогаш за секоја точка постои единствен вектор на правец во таа точка кој има хоризонтална координата (t -компонента), еднаква на 1. Според тоа, тој вектор има облик $(1, v(t, x))$, каде $v(t, x)$ е вектор во \mathbb{R}^n кој зависи од точката на проширениот фазен простор. Со други зборови невертикалното поле на правци во проширениот фазен простор се дефинира со векторското поле во фазниот простор кое зависи од времето. Во координатен запис векторското поле во n димензионалниот простор се задава со n функции од n променливи и соодветната диференцијална равенка е всушност систем од n диференцијални равенки од прв ред $x_1' = v_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, x_n' = v_n(t, x_1, \dots, x_n)$, а решение е вектор функцијата $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ за која важи $\varphi_k'(t) = v_k(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$, $k=1, 2, \dots, n$.

Диференцијална равенка на системот ловец – жртва

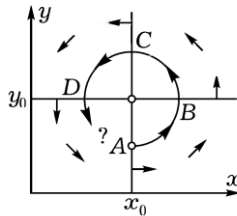
Со едноставен пример ќе го објасниме моделот кој ја опишува борбата на две популации: ловци и жртви. Да разгледаме рибник во кој живеат риби од два вида, на пример шуки и крапови. Кога би немало шуки тогаш краповите би се размножувале експоненцијално со брзина пропорционална на нивното количество x , па соодветната диференцијална равенка, како што веќе знаеме, би била $x' = kx$ (претпоставуваме дека вкупната маса крапови е доста помала од масата на рибникот). Но доколку во рибникот постојат и шуки, нека y е нивното количество, тогаш треба да се земат во предвид краповите изедени од шуките. Ќе

претпоставиме дека бројот на средби на крапови со штуки е пропорционален како на бројот на крапови така и на бројот на штуки; тогаш за брзината на промената на бројот на крапови ќе се добие диференцијалната равенка $x' = kx - axy$. Што се однесува до штуките без крапови тие би умирале: $y' = -ly$, а во присуство на крапови тие би почнале да се размножуваат со брзина пропорционална на бројот на изедени крапови $y' = -ly + bxy$. На тој начин доаѓаме до систем диференцијални равенки за едноставен модел на системот ловец – жртва

$$x' = kx - axy$$

$$y' = -ly + bxy$$

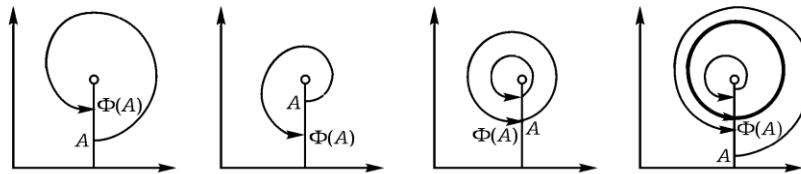
Овој модел се вика **модел Лотка – Волтера**, според имињата на авторите. Десната страна на системот определува векторско поле во рамнината. Соодветниот вектор во точката (x,y) има координати $(kx-axy, -ly+bxy)$. Тоа ќе биде полето на фазни брзини. Фазен простор ќе биде аголот $x \geq 0, y \geq 0$ (првиот квадрант). Не е тешко да се скицира векторско поле на фазни брзини следејќи ја промената на знаците на координатите. Од равенките јасно е дека сингуларната точка на полето е $(x_0 = l/b, y_0 = k/a)$ и таа го означува рамнотежното количество на крапови и штуки кога прирастот на крапови ги урамнотежува апетитите на штуките, а прирастот на штуките ја урамнотежува нивната природна смртност.



Цртеж 1.10

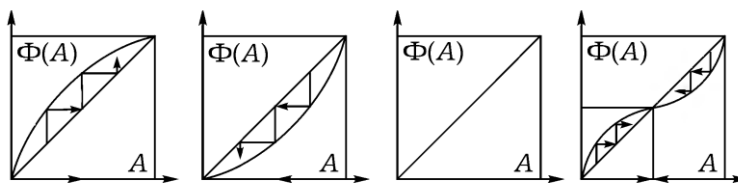
Поле на фазни брзини кај моделот ловец - жртва

Ако почетниот број на штуки е помал од y_0 (точка A) тогаш бројот на крапови и штуки ќе расте се додека размножувајќи се штуките не почнат да јадат крапови повеќе од нивниот прираст (точка B); потоа бројот на крапови почнува да опаѓа, а бројот на штуки да расте се додека не дојде до недостаток на храна и штуките почнуваат да изумираат (точка C); потоа бројот на штуки ќе се намали толку што краповите повторно одново ќе почнат да се размножуваат (точка D). Ова ново настанато размножување на краповите ќе доведе до тоа што со време и штуките ќе почнат да се размножуваат. На тој начин ќе произлезат осцилации на броевите на крапови и штуки блиску до рамнотежниот број на едните и на другите. Сепак се поставува прашањето дали тие осцилации се периодични или не. Нашиот приближен цртеж на полето на фазни брзини не дозволува одговор на тој проблем, но може да се претпостават различни случаи, на пример претставени на цртеж 1.11.



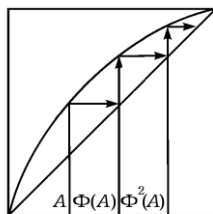
Цртеж 1.11
Функција на sukcesивност

За да ги разјасниме тие случаи ќе разгледаме сегмент кој ја поврзува сингуларната точка со оската x . Секоја точка A од тој сегмент (која не лежи на оската x) дефинира фазна крива која повторно го пресечува сегментот во некоја точка $\Phi(A)$. Оваа функција Φ се вика *функција на sukcesивност* или *функција на последователност* (или пресликување на Поанкаре, а исто така и монодромно или голономно пресликување). Да го разгледаме графикот на оваа функција. Тој се нарекува *дијаграм на Ламере*. Дијаграмот на Ламере за четирите случаи дадени претходно, е претставен на цртежите подолу:



Цртеж 1.12
Дијаграми на Ламере

Со помош на дијаграмот на Ламере лесно може да се конструира низа од слики на точката A и sukcesивни пресликувања Φ . Потоа се конструира така наречена скала на Ламере така што апцисите и ординатите на врвовите се A , $\Phi(A)$, $\Phi^2(A)=\Phi(\Phi(A))$,



Цртеж 1.13
Скала на Ламере

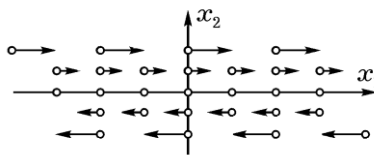
Точките на пресек на графикот на функцијата Φ со дијагоналата (правата $\Phi=A$) одговараат на затворена фазна крива (цикл) на фазната рамнина. Циклот ќе велиме дека е стабилен (нестабилан) ако во соодветната точка A важи $\Phi'(A)<1$ ($\Phi'(A)>1$).

Кај нашите четири дијаграми на Ламере во првиот случај фазните криви се спирали кои се намотуваат на сингуларната точка, во вториот се одмотуваат од неа, во третиот се затворени криви. Во четвртиот случај фазните криви се намотуваат на стабилниот цикл однатре и однадвор.

Во првиот случај со тек на време се воспоставува рамнотежа на населението во рибникот и осцилациите се пригушуваат. Во вториот случај рамнотежната состојба е нестабилна, осцилациите се зголемуваат. При тоа ќе настапи момент кога бројот на крапови (штуки) ќе биде помал од 1, во тој момент нашиот модел ќе биде неприменлив и населението во рибникот ќе изумира. Во третиот случај се разгледува периодична осцилација на бројноста на крапови и штуки во круг на рамнотежната состојба; амплитудата на осцилациите се определува од почетните услови. Во четвртиот случај исто така се разгледува периодично осцилирање на бројот на краповите и штуките, но амплитудата на установените осцилации не зависи од почетните услови, било која фазна спирала се намотува на граничниот цикл. Во таков случај кажуваме дека системот влегол во автоосцилациски режим.

Слободна честичка на права

Во согласност со првиот Њутнов закон забрзувањето на материјална точка која не подлежи на дејство од надворешни сили, е еднакво на нула, а бидејќи забрзувањето го добиваме како прв извод на брзината, тогаш ќе имаме: $x''=0$. Ако точката $x \in \mathbb{R}$ тогаш зборуваме за слободна честичка на права (може да се претстави себе си како глава од дрвце од кибрит); фазниот простор има димензија 2, бидејќи секое движење е определено со почетната положба и почетната брзина. На фазната рамнина со координати $x_1 = x$, $x_2 = x'$ се појавува векторско поле на фазни брзини: $x_1' = x_2$, $x_2' = 0$ па според тоа координатите (компонентите) на полето се еднакви на $(x_2, 0)$.



Цртеж 1.14
Поле на фазни брзини кај слободна честичка

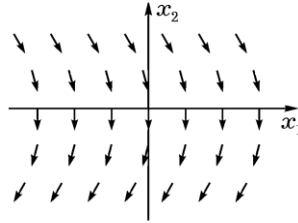
Од тоа што $x''=0$ следува дека $x'=const.$ што значи дека сите точки од оската x_1 се јавуваат како рамнотежни состојби. Рамнотежите од овој вид се викаат рамнодушни (интерферентни), а во математиката нестабилни (доволно мала промена на почетната фазна точка доведува за доволно долго време до поголема промена на состојбата), фазните криви се хоризонтални прави $x_2 = const.$ и сите точки од оската x_1 .

Пример 1.2. Да се најде решение со почетни услови (a,b) за $t_0=0$.

Решение: $x_2(t) = \varphi_2(t) = b$; $x_2(t) = x_1'(t) \Rightarrow x_1(t) = \varphi_1(t) = a+bt$.

Слободно паѓање

Во согласност со Галилеј, забрзувањето g на тело што паѓа блиску до површината на Земјата е константно. Ако x е висина тогаш $x'' = -g$. Воведувајќи координати во фазната рамнина, како во предходниот пример, се добива системот $x_1' = x_2$, $x_2' = -g$. Векторското поле, дадено со десната страна, е скицирано на црт 1.15.



Цртеж 1.15

Поле на фазни брзини кај честичка што паѓа

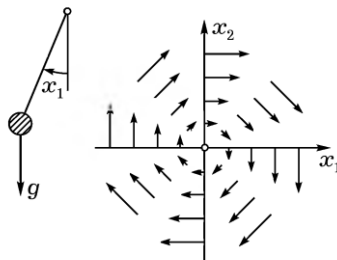
Ќе покажеме дека фазните криви се параболи:

$$x_2' = -g \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -g \Rightarrow x_2 = -gt + C_1 \Rightarrow x_1' = -gt + C_1 \Rightarrow x_1 = -g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

т.е. $x = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$, што претставува равенка на парабола.

Мали осцилации

Во многу случаи силата која го враќа системот во рамнотежна положба со поголема или помала точност е пропорционална на отклонот од рамнотежната состојба (закон на Хук; всушност се работи за тоа што во рамнотежна состојба силата е нула, а во мал интервал секоја функција се приближува до линеарна). Доаѓаме со тоа до равенката на мали осцилации $x'' = -kx$. Коефициентот може да се стави 1 без да се губи од општоста. Равенката го добива видот: $x'' = -x$. Како и претходно, со воведување на координати $x_1 = x$, $x_2 = x_1'$ во фазната рамнина (координатен систем) таа равенка ќе ја запишеме во вид на систем: $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$. Со десните страни е зададено векторското поле на фазната рамнина. Тоа поле е скицирано на црт. 1.16.



Цртеж 1.16

Поле на фазни брзини кај мали осцилации

Фазните криви се кружници и центар: со решавање на системот диференцијални равенки

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1$$

се добива решението $x_1^2 + x_2^2 = C$, што претстаува равенка на кружница за $C \neq 0$ и точка (центар) за $C = 0$.

Освен тоа, како доказ го имаме податокот што векторот на фазните брзини е нормален на радиус векторот.

Пример 1.3: Да се најде решение со почетни услови $x(0) = a$, $x'(0) = b$.

Решение: Во согласност со претходните две задачи, потребно е векторот на почетниот услов да се заврти за агол t . Добиваме $x_1(t) = a \cos t + b \sin t$, $x_2(t) = -a \sin t + b \cos t$.

Забелешка 1.4. На тој начин ние докажавме дека x извршува хармониски осцилации и го констатиравме законот на зачувување на енергијата. Големината $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ вдоль фазната крива е константа.

Пример 1.4: Докажи го законот на зачувување на енергијата $k \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ за системот $x_1' = x_2$, $x_2' = -kx_1$ ($k > 0$).

Решение: Се добива директно со решавање на дадениот систем:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -kx_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{kx_1} \quad \Rightarrow \quad kx_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$$

од каде со интегрирање имаме $k \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = C$.

Забелешка 1.5: Големината $\frac{x_1^2}{2}$ се нарекува кинетичка енергија, а $k \frac{x_2^2}{2}$ потенцијална енергија.

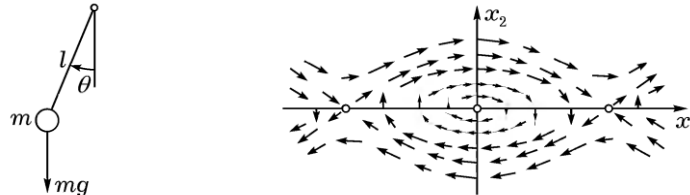
Математичко нишало

Да разгледаме бестежинска прачка со должина l , прицврстена на едниот крај, и на другиот крај топче со точката маса m . Да го означиме со θ аголот на отклон на нишалото од вертикалата. Во согласност со законот на механиката, аголот забрзување на нишалото θ'' е пропорционално на моментот на силата на тежината:

$$I \cdot \theta'' = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta,$$

каде $I = m \cdot l^2$ - момент на инерција (знакот минус се објаснува со тоа што моментот се стреми да го намали отклонот).

Значи равенката на нишалото има вид: $\theta'' = -k \cdot \sin\theta$, $k = g/l$. Коефициентот може да се земе да е 1 без да се изгуби од општоста и равенката го има видот: $\theta'' = -\sin\theta$. Векторскиот простор има димензија 2. За координати можат да се земат аголот на отклон $x_1 = \theta$ и аголната брзина $x_2 = \theta'$. Равенката добива вид на систем $x_1' = x_2$, $x_2' = -\sin x_1$. Десната страна го задава векторското поле на фазните брзини скицирано на цртеж 1.17.



Цртеж 1.17
Поле на фазни брзини кај нишалото

Пример 1.5: Докажи дека координатниот почеток ($x_1 = x_2 = 0$) и точката ($x_1 = \pi$, $x_2 = 0$) се јавуваат како фазни криви. Видот на останатите фазни криви подетално ќе се изучи покасно.

Решение: Се покажува со директна замена во равенките.

Забелешка 1.6: При мали аголни отклони $\sin\theta$ е еквивалентно на аголот θ . Со замена на $\sin\theta$ со приближната вредност θ , ние ја сведуваме равенката на нишало на равенка на мали осцилации. Работата е во тоа што неколку работи направени при изучувањето на попростата равенка на мали осцилации можат да се пренесат и на равенката на нишалото што сепак бара специјално изучување.

Одредување на типот на сингуларните точки

Сега да ги разгледаме истите тие процеси, но од страна на диференцијални равенки. Од теоремата за егзистенција и единственост следи дека решението на диференцијалната равенка $x' = v(x)$, каде v е глатка (непрекината диференцијабилна) функција зададена на интервал U со почетни услови (t_0, x_0) постои за било кое $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ и е единствено во смисол било кои две решенија со исти почетни услови се совпаѓаат. Тоа решение е дадено со формулата на Бароу:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)} \quad \text{ако } v(x_0) \neq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(t) = x_0 \quad \text{ако } v(x_0) = 0.$$

која се добива едноставно со интеграција на равенката $\frac{dx}{v(x)} = dt$.

Равенката $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)Q(y)}{M(x)N(y)}$, каде $P(x), Q(y), M(x), N(y)$ се дадени реални

функции од соодветната реална променлива, е диференцијална равенка од прв ред кај која променливите x и y може да се разделат.

Начинот на решавање е доведување на равенката во вид $\frac{N(y)}{Q(y)} dy = -\frac{P(x)}{M(x)} dx$. Потоа се бара неопределен интеграл од левата и од десната страна во однос на соодветната подинтегрална променлива и се добива општото решение како имплицитно зададена функција со формулата $\int \frac{N(y)}{Q(y)} dy + \int \frac{P(x)}{M(x)} dx = C$, каде C е произволна константа.

На оваа диференцијална равенка и одговара систем диференцијални равенки од прв ред од вид $\frac{dx}{dt} = -\frac{M(x)}{P(x)}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{Q(y)}{N(y)}$, односно $\frac{dx}{dt} = g(x)$, $\frac{dy}{dt} = f(y)$.

Решението на системот е парот $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, каде $x=\varphi_1(t)$ е решение на првата равенка, а $y=\varphi_2(t)$ е решение на втората равенка, дефинирани на еден ист интервал.

Пример 1.6: Да го разгледаме системот $x'=x$, $y'=ky$. Решението φ со почетен услов $(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)) = (x_0, y_0)$ е дефинирано со функциите:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= x_0 e^{(t-t_0)}, \\ \varphi_2(t) &= y_0 e^{k(t-t_0)}.\end{aligned}$$

За овој систем рамнотежна состојба (стационарна точка на системот или сингуларна точка на равенката) на соодветното векторско поле на фазни брзини со димензија 2 е точката $(0,0)$. Соодветната диференцијална равенка е

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{x}.$$

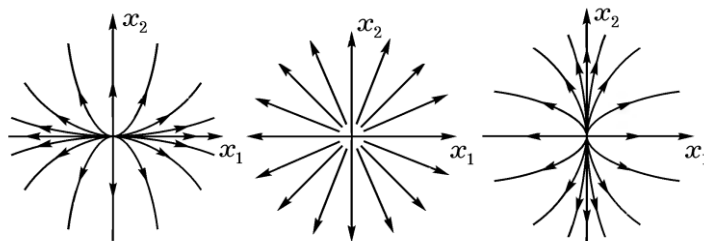
Со решавање на оваа диференцијална равенка добиваме дека вдоль секоја фазна крива $(x, y) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ ќе важи:

$$|y| = C|x|^k$$

каде C не зависи од t , или ќе важи $x=0$. Во зависност од k фамилијата криви има различен вид.

- 1) Ако $k>0$ тоа множество е фамилија од параболи со показател k кои ја допираат x оската во координатниот почеток ако $k>1$, односно оската y во координатниот почеток ако $0<k<1$.
- 2) За $k=1$ се добива фамилија прави кои минуваат низ координатниот почеток.

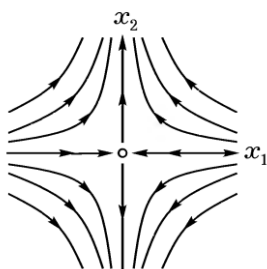
Положбата на тие фазни криви дадени на цртеж 1.18 ја дефинира стационарната точка како јазел односно звездолик јазел (сингуларитет во $x=0$, $y=0$).



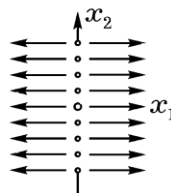
Цртеж 1.18

Фазни криви $|y| = C|x|^k$

- 3) Ако пак $k < 0$ кривите имаат вид на хиперболи и таа положба ја дефинира стационарната точка како седло (цртеж 1.19).
- 4) За $k=0$ кривите преминуваат во прави (цртеж 1.20).



Цртеж 1.19



Цртеж 1.20

Фазни криви на равенката $|y| = C|x|^k$

Од самата формула е очигледно дека секоја фазна крива лежи целосно во еден квадрант (или на координатна полуоска или се совпаѓа со координатниот почеток кој за секое k се јавува како фазна крива). Овде полето на правци е дадено со $v = (v_1(x), v_2(y)) \equiv (x, ky)$.

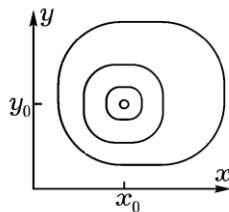
Пример 1.7: Докажете дека секоја парабола се состои од три фазни криви.

Решение: Едната фазна крива делот од параболата определен со равенката $y = C|x|^k$, другата фазна крива е делот од параболата определен со равенката $-y = C|x|^k$ и третата фазна крива е координатниот почеток.

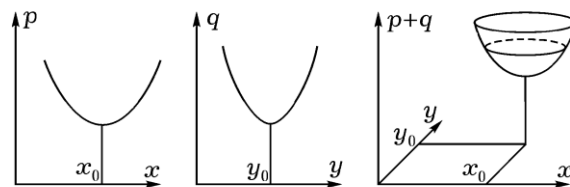
Теорема 1.3: Фазните криви на системот $\frac{dx}{dt} = g(x)$, $\frac{dy}{dt} = f(y)$, каде $f(y)$ и $g(x)$ се глатки функции различни од нула во областа што се разгледува, се и интегрални криви на диференцијалната равенка $\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$ и обратно.

Да го разгледаме повторно системот за моделот Лотка-Волтера $x' = kx - axy$, $y' = -ly + bxy$.

Теорема 1.4: Фазните криви на системот Лотка-Волтера се затворени (цртеж 1.21).



Цртеж 1.21
Фазни криви за моделот Лотка-Волтера



Цртеж 1.22
Конструкција на фазните криви за моделот на Лотка-Волтера

Доказ: Фазните криви на системот Л-В. се совпаѓаат со интегралните криви на диференцијалната равенка $\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx-l)}{x(k-ay)}$ или со фазните криви на системот

$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{bx-l}$, $\frac{dy}{d\tau} = \frac{y}{k-ay}$ во областа каде x , y , $bx-l$, $k-ay$ се различни од нула. Со решавање на горната диференцијална равенка со раздвоени променливи го добиваме решението:

$$bx - l \cdot \ln x + ay - k \cdot \ln y = C$$

или со воведување на смените:

$$bx - l \cdot \ln x = p(x) \quad \text{и} \quad ay - k \cdot \ln y = q(y)$$

добиваме: $p(x) + q(y) = C$.

Графиците на функциите $p(x)$ и $q(y)$ се прикажани на црт. 1.22. Од скиците на овие два графика јасно е како би изгледал графикот на функцијата $p(x) + q(y) = C$ кој исто така е прикажан на црт. 1.22, со што доказот на теоремата е веќе очигледен.

Од затвореноста на фазните криви следува дека количеството крапови и штуки кај моделот Лотка-Волтера периодично се менува со времето. Периодот на осцилации зависи од почетните услови. Со тоа за системот Лотка-Волтера се точни следните констатации:

- 1) Постои (и е единствена за $x > 0, y > 0$) рамнотежна положба (x_0, y_0) .
- 2) Количеството крапови и штуки при нерамнотежни почетни услови се менува периодично со времето.
- 3) Фазните криви на системот се затворени.

Ќе разгледаме уште два примера:

Пример 1.8: Нека е даден системот $x' = -y, y' = x$. Фазните криви на овој систем се совпаѓаат со интегралните криви на диференцијалната равенка $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ чие општо решение е дадено со $x^2 + y^2 = C$ ($x dx + y dy = 0$), а интегралните криви се концентрични кружници (затворени циклуси) кои се ниво линии на параболоидот $z = x^2 + y^2$ ($dz = 2x dx + 2y dy$). Сингуларната точка (координатниот почеток $x=0, y=0$) се вика центар. Карактеристиките односно решенијата на системот се добиваат со помош на решенијата на диференцијалната равенка од втор ред $x'' + x = 0$. Имено, за решенија ги имаме $x = C_1 \cos t - C_2 \sin t, y = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ (периодични решенија).

Пример 1.9: На системот $x' = kx - y, y' = x + ky$ одговара диференцијалната равенка $\frac{dy}{dx} = \frac{x + ky}{kx - y}$, која со трансформацијата $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ се сведува на диференцијалната равенка $\frac{d\rho}{d\theta} = k\rho$. Последната диференцијална равенка има општо решение $\rho = C \cdot e^{k\theta}$. За $k \neq 0$ соодветните интегрални криви (логаритамски спирали) се навиваат околу координатниот почеток, сингуларна точка која се нарекува фокус. За $k=0$ се добива претходниот систем каде сингуларната точка се нарекува центар.

Теорема 1.5: Нека е даден системот $x' = Ax + By, y' = Cx + Dy$ на кој му одговара диференцијалната равенка $\frac{dy}{dx} = \frac{Cx + Dy}{Ax + By}$. Овој систем има сингуларна точка во координатниот почеток $(0,0)$. Нека $AD - BC \neq 0$. Системот има сингуларитет во $(0,0)$ и неговиот вид го определуваме согласно следната табела:

$$\begin{aligned}
 (A - D)^2 + 4BC > 0 \quad & \begin{cases} AD - BC > 0 & - \text{јазел} \\ AD - BC < 0 & - \text{седло} \end{cases} \\
 (A - D)^2 + 4BC < 0 \quad & \begin{cases} AD - BC > 0 & - \text{фокус} \\ AD - BC < 0 & - \text{центар} \end{cases} \\
 (A - D)^2 + 4BC = 0 \quad & - \text{јазел} \quad (A = D, B = C = 0 \quad - \text{звездолук јазел})
 \end{aligned}$$

Ако $AD-BC=0$ тогаш интегралните криви се паралелни прави па според тоа $(0,0)$ не е сингуларитет.

Теорема 1.6 (Бендиксон): Нека е даден автономен динамички систем $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$. Ако P и Q се непрекинати функции, $P(0,0)=Q(0,0)=0$ и можат да се претстават во вид $P(x,y)=H(x,y)+F(x,y)$, $Q(x,y)=K(x,y)+G(x,y)$, каде H и K се два хомогени полиноми од ист ред $m \geq 1$, без заеднички реален множител, а F и G се две функции кои го задоволуваат условот $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F(x,y)}{\rho^m} = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{G(x,y)}{\rho^m} = 0$ ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) и ако хомогениот полином од $(m+1)$ -ви степен $M(x,y) = xK(x,y) - yH(x,y)$ не е идентички еднаков на нула, тогаш секоја фазна крива на системот бесконечно се приближува кон $(0,0)$ и таму завршува или како спирала (фокус) или има определена тангентата со коефициент на правец θ^* за кој важи $M(\cos\theta^*, \sin\theta^*)=0$ (седло, јазел).

Кај нелинеарниот модел исклучок се следните случаи:

1. $(A-D)^2 + 4BC < 0$, $A+D=0$, сингуларитетот може да биде освен центар и фокус.
2. $(A-D)^2 + 4BC = 0$, сингуларитетот е со иста природа ако е задоволен појак услов $F=O(\rho^{1+\epsilon})$, $G=O(\rho^{1+\epsilon})$.

Карактеристиките (фазни криви) кои тргнуваат од точката (x_0, y_0) во чија околина според теоремата за егзистенција и единственост постои единствено решение, може да се продолжат и тогаш кога $t \rightarrow \pm\infty$ стигнува до точка која ќе биде сингуларитет.

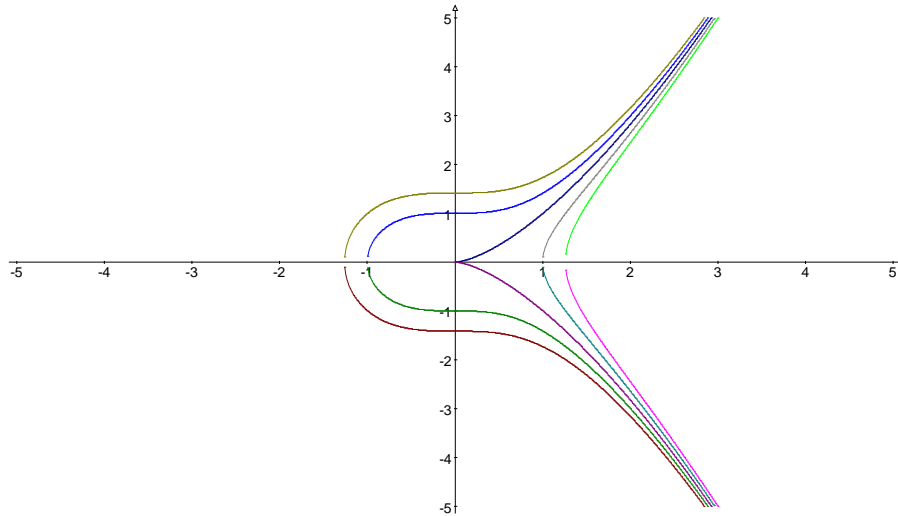
На овој систем одговара диференцијална равенка $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, која се решава со интегрален множител. Имено фазните криви се ниво линиите на функцијата $z=z(x,y)$ за која важи $dz=Pdx+Qdy$, а фазните криви се дадени со $z=C$.

За нас е интересно кога полукарактеристиката е продолжена до сингуларитетот бидејќи ако излезе од областа D на која што е дефинирана не можеме ништо да кажеме.

Теорема 1.7: Нека е даден системот $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ и нека има решение $x=\varphi(t), y=\psi(t)$. Точката (a,b) е сингуларитет т.е. $P(a,b)=0, Q(a,b)=0$ ако и само ако $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = a, \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = b$.

Како илустрација на случај кога само една карактеристика доаѓа и си оди од сингуларната точка ќе го наведеме следниот пример.

Пример 1.10: Системот $x'=2y$, $y'=3x^2$ на кој одговара диференцијална равенка $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$, има општо решение $y^2 = x^3 + C$. Всушност карактеристики се ниво линиите на функцијата $z=y^2-x^3$ и единствено карактеристиката за $C=0$ минува низ сингуларната точка $(0,0)$ која се јавува како точка на враќање (цртеж 1.23).



Цртеж 1.23
Фазни криви за системот равенки $x'=2y$, $y'=3x^2$

Затворените карактеристики генерално кажано се јавуваат како гранични контурни циклуси и имаат суштинско значење во примената бидејќи одговараат на периодични решенија во однос на параметарот t кои можат да се појават во механички, електрични и други неконзервативни системи кај кои некој надворешен извор на енергија го компензира растурот енергија кој се јавува како последица на противречноста на системот. Овие осцилации се викаат и релаксациони. Исто така е важен и проблемот за бројот на затворени карактеристики, врзан за бројот на сингуларитети.

Пример кај кој се разгледува овој проблем е диференцијалната равенка на Ленар $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0$ или соодветниот систем $\frac{dx}{dt} = y - F(x)$, $\frac{dy}{dt} = -g(x)$, односно во една диференцијалната равенка $\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y - F(x)}$, каде $F(x) = \int_0^x f(u)du$. Оваа диференцијална равенка има една затворена карактеристика ако f и g се парни односно непарни диференцијабилно непрекинати функции на \mathbb{R} , $xg(x) > 0$ за секое $x \neq 0$, $g'(0) > 0$, функцијата F е непарна функција, со единствена позитивна

нула $x=\alpha$, $F(x)<0$ за $0<x<\alpha$, $F(x)>0$ за $x>\alpha$, не опаѓа и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$. Посебен

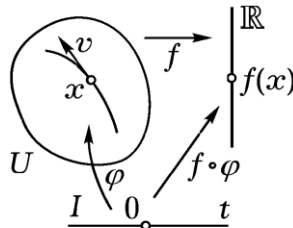
случај е диференцијалната равенка на Ван дер Пол $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$.

Извод по правец

Многу геометриски поими можат да се опишат на два начина: на јазикот на точки од просторот или со помош на функции зададени на тој простор. Таква дуализација често се покажува корисна во разни области од математиката.

Всушност векторското поле може да се опише не само со брзината на движење, туку и со диференцирање на функции, а основните теореми од теоријата на диференцијални равенки можат да се формулираат со термини на први интеграл.

Нека v е вектор со почеток во точката x од областа $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција. Нека $\varphi : I \rightarrow U$ е било која параметризирана крива која почнува (излегува) од x со брзина v така што $\varphi(0)=x$, $\varphi'(0)=v$. Со композицијата на овие две пресликувања (сложена функција) добиваме пресликување од интервалот I од реалната оска во реалната оска: $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ \varphi)(t)=f(\varphi(t))$, т.е. добиваме реална функција од реален аргумент (цртеж 1.24).



Цртеж 1.24

Извод на функцијата f во правец на векторот v

Дефиниција 1.5: Извод на функцијата f по правец на векторот v се нарекува изводот на горе конструираната функција во нулата. Тој број се означува со $L_v f$ (L -во чест на математичарот Софус Ли).

За да се оправда оваа дефиниција добро е да се провери дека добиениот број зависи само од векторот v , а не од специјалниот избор на кривата φ . Тоа е очигледно, на пример од изразот на изводот по правец преку координати: по правилото за диференцирање на сложена функција

$$L_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi) = \left. \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = (\nabla f, x') = (\nabla f, v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i$$

каде ∇f е Јакобијан матрица за функцијата f , а изводите се добиваат во точката на соодветниот вектор. Овде x_i се координати на таа точка, v_i компоненти на векторот на брзината во тој систем на координати.

Нека v е векторско поле во областа U .

Дефиниција 1.6: **Изводна функција** на функцијата $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ во правец на полето v се нарекува нова функција $L_v f: U \rightarrow \mathbb{R}$ чија вредност во секоја точка x е еднаква на изводот на функцијата f во правец на векторот од полето чиј почеток е во точката x . $(L_v f)(x) = L_{v(x)} f$. Функцијата $L_v f$ се нарекува исто така и изводна функција на Ли на функцијата f .

Пример 1.11: Нека $v = (\partial/\partial x_1)$ е базично векторско поле чии компоненти во координатниот систем (x_1, x_2, \dots, x_n) се еднакви на $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Тогаш: $L_v f = (\partial/\partial x_1)f$ што претставува прв парцијален извод на функцијата f во однос на променливата x_1 .

2. ПОИМ ЗА ЕДНОПАРАМЕТАРСКА ГРУПА ЛИНЕАРНИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Математичката формализација на поимот детерминиран процес доведува до поимот на еднопараметарска група линеарни трансформации. Овде ќе дефинираме и изучуваме еднопараметарска група *дифеоморфизми* и нивната врска со векторски полиња.

Дефиниција 2.1: **Трансформација** на множество се нарекува неговото взаемно еднозначно пресликување само во себе (биекција на даденото множество).

Пример 2.1: Пресликувањето во множеството реални броеви кое бројот x го пресликува во x^3 е трансформација; пресликувањето кое реалниот број x го пресликува во e^x не е трансформација (со ова пресликување R се пресликува во R^+).

Дефиниција 2.2: Фамилија од трансформации на едно множество се нарекува **група трансформации** ако заедно со секоја трансформација f во фамилијата припаѓа и нејзината инверзна трансформација f^{-1} и со секои две трансформации f и g во фамилијата припаѓа и нивниот производ fg , при што $(fg)(x)=f(g(x))$.

Ако се разгледа оваа група на трансформации како множество A со дефинирани две операции (пресликувања) $A \times A \rightarrow A$ и $A \rightarrow A$ ($(f,g) \rightarrow fg$ и $f \rightarrow f^{-1}$) тогаш може да се дојде до алгебарскиот поим за апстрактна група. Овде операцијата множење (композиција) на функции е основната операција, f^{-1} е инверзен елемент, а идентичното пресликување е единечен елемент. За дадено множество со дефинирана операција во него да биде група уште е потребно да важи и асоцијативниот закон, а асоцијативноста при композиција на пресликувања, $f(gh)=(fg)h$, знаеме дека сигурно важи, па ќе важи и кај нашата група трансформации.

Дефиниција 2.3: Нека G е група а M множество. Велиме дека е зададено **дејство** на групата G врз множеството M ако на секој елемент g од групата G му соодветствува трансформација $T_g : M \rightarrow M$, при што на производот од било кои елементи од групата G му соодветствува производ на соодветните трансформации на тие елементи, а на взаемно обратниот елемент од групата G соодветствува соодветната взаемно обратна трансформација. Со други зборови $T_{fg} = T_f T_g$, $T_{f^{-1}} = (T_f)^{-1}$.

Конкретно, секоја група трансформации на едно множество е дејство на таа група врз истото тоа множество. Всушност $T_g \equiv g$.

Трансформацијата T_g се нарекува и дејство на елементот $g \in G$ врз множеството M . Дејството на групата G врз множеството M определува уште и

пресликување $T: G \times M \rightarrow M, (g, m) \rightarrow T_g m$. Елементот $T_g m = gm$ е добиен со дејство на g врз m . При фиксно m се добива множество $\{gm \mid g \in G\} \subseteq M$, кое се вика **орбита** на точката m .

Дефиниција 2.4: Пресликувањето $\varphi: G \rightarrow H$ од групата G во групата H се нарекува **хомоморфизам** ако важи: $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$, $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$.

Забелешка 2.1: Дејството на групата G врз множеството M е хомоморфизам од групата G во групата од сите трансформации на множеството M .

Дефиниција 2.5: **Еднопараметарска група на трансформации** на множество се нарекува дејството на групата на реални броеви врз тоа множество.

Еднопараметарската група трансформации на множеството M обично се означува со $\{g^t\}$. Овде $g^t: M \rightarrow M$ е трансформација која е соодветна на точката $t \in \mathbb{R}$. На тој начин еднопараметарската група трансформации на множеството M е фамилија трансформации g^t , параметаризирани со реален параметар t такви што за било кои реални броеви s и t важи:

- 1) $g^{t+s} = g^t g^s$,
- 2) $g^{-t} = (g^t)^{-1}$.

Параметарот t обично се вика време, а трансформацијата g^t се вика **трансформирање за време t** .

Пример 2.2: $M = \mathbb{R}$, $g^t: x \rightarrow x + 2t$ (транслација за $2t$);

Пример 2.3: $M = \mathbb{R}$, $g^t: x \rightarrow e^t x$ (растегнување за e^t пати).

Од 1) следува дека g^0 е идентичната трансформација $g^0: x \rightarrow x$.

Еднопараметарската група трансформации на множество е математички еквивалент на физичкиот поим двостран детерминиран процес. Нека M е фазен простор на процесот. Точката од тој простор е определена состојба на процесот. Да претпоставиме дека во моментот $t=0$ процесот бил во состојба x . Тогаш во друг момент t состојбата на процесот ќе биде друга. Нека новата состојба на процесот ја означиме со $g^t x$. Со тоа ние дефинираме за секое t пресликување $g^t: M \rightarrow M$ на фазниот простор на процесот во самиот себе. Пресликувањето g^t ја трансформира (пресликува) состојбата на процесот во моментот 0 во состојба во моментот t . Тоа се нарекува трансформирање на процесот за време t . Секако дека пресликувањето g^t така дефинирано е трансформација (взаемно еднозначно пресликување). Тоа следува од фактот што според дефиницијата за детерминираност на процесот секоја состојба определува како иднина така и минато на процесот. Својството 1) ($g^{t+s} = g^t g^s$) е исто така задоволено. Навистина, нека процесот во почетниот момент се наоѓал во состојба x . Преминот кон состојба во момент $t+s$ може да се реализира било веднаш ($x \rightarrow g^{t+s} x$), било најпрвин да се реализира делумната состојба $g^t x$ во која процесот ќе премине за време t , а потоа да се разгледа каде таа делумна состојба $g^t x$ ќе премине за време s . Совпаѓањето на двата резултата ($g^{t+s} x = g^t g^s x$) означува дека преминот од почетната состојба во крајната за фиксно време се

реализира секогаш исто, независно од тоа во кој момент на времето ние тргнуваме од почетната состојба.

Еднопараметарската група трансформации (ЕПГТ) на множеството M се нарекува исто така и **фазен поток** со фазен простор M (фазниот простор може да се претстави како затворена течност во која честичката x после време t преминува во точката $g^t x$). **Орбитите на фазниот поток се нарекуваат негови фазни криви или траектории.**

Пример 2.4: Нека g^t е ротација на рамнина за агол t околу почетокот. Фамилијата од овие ротации е група и орбитите на фазниот поток $\{g^t\}$ се почетокот и кружниците со центар во почетокот. Точките кои се наоѓаат на фазните криви се нарекуваат **неподвижни точки на потокот**.

Дефиниција 2.6: **Дифеоморфизам** се нарекува пресликување кое е глатко заедно со своето соодветно инверзно пресликување (глатко – ако сите координатни функции се глатки, а секако и на нив инверзните).

Еднопараметарската група дифеоморфизми се нарекува ЕПГТ кои се дифеоморфизми и кои го задоволуваат уште условот $g^t x$ да зависи глатко од двата аргумента t и x .

Пример 2.5: $M=\mathbb{R}$, $g^t: x \rightarrow e^{kt}x$;

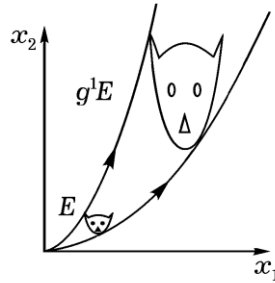
Пример 2.6: $M=\mathbb{R}^2$, g^t е ротација околу 0 за агол t .

Еднопараметарска група линеарни трансформации (ЕПГЛТ) се нарекува еднопараметарска група дифеоморфизми кои се линеарни трансформации.

Пример 2.7: Нека на рамнината $x_1 O x_2$ ја разгледаме трансформацијата $g^t(x_1, x_2) = (e^{\alpha t} x_1, e^{\beta t} x_2)$. Јасно е дека g^t е линеарна трансформација (за време t оската x_1 се растегнува $e^{\alpha t}$ пати, а оската x_2 се растегнува $e^{\beta t}$ пати). Особина $g^{t+s} = g^t g^s$ произлегува од особината на експоненти: $e^{u+v} = e^u e^v$, глатката зависност од t е исто така очигледна (особина на експоненцијална функција). Според тоа $\{g^t\}$ е ЕПГЛТ дефинирана на рамнина.

Нека конкретно $\alpha=1$, $\beta=2$. Во тој случај фазните криви се неподвижната точка 0 , позитивниот дел од координатните оски и половините параболи. Дејството на една од трансформациите на фазниот поток $\{g^t\}$ врз областа E е прикажано на цртеж 2.1.

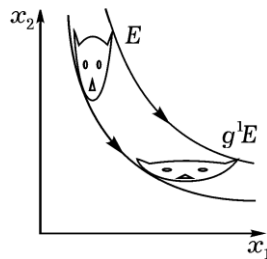
Плоштината на областа E се зголемува при дејството g^t за $e^t e^{2t} = e^{3t}$ пати.



Цртеж 2.1

Дејство на фазен поток на дадена област

Да го разгледаме сега случајот $\alpha=1$, $\beta=-1$. Тогаш трансформацијата g^t се состои од контракција e^t пати во насока на оската x_2 и растегнување e^t пати во насока на оската x_1 . Така добиената трансформација се вика хиперболичка искривеност при што фазните криви (орбити) на потокот $\{g^t\}$ се половини хиперболи; $x_1 x_2 = \text{const.}$ (заедно со координатниот почеток и позитивните делови од x_1 и x_2 оските). Хиперболичката искривеност ја зачувува плоштината но значително ја деформира формата на фигурата (цртеж 2.2).



Цртеж 2.2

Хиперболичка искривеност

Нека сега ја разгледаме ЕПГД (дифеоморфизми) $\{g^t\}$ на областа M .

Дефиниција 2.7: Вектор на фазната брзина на потокот $\{g^t\}$ во точката $x \in M$ се нарекува брзината на излезот на точката $g^t x$ од точката x , т.е. $v(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t x)$.

Сите вектори на фазните брзини на потокот во сите точки од областа M образуваат глатко векторско поле (бидејќи $g^t x$ глатко зависи од t и x). Тоа поле се вика **поле на фазни брзини**.

Пример 2.8: Најдете го полето на фазни брзини на поток по правци (прави)

- а) $g^t x = x + t$; б) $g^t x = e^t x$; в) $g^t x = e^{-t} x$.

Решение:

$$\text{а) } v(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g^t x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x+t) = 1;$$

$$\text{б) } v(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g^t x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^t x) = x e^t \Big|_{t=0} = x;$$

$$\text{в) } v(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g^t x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^{-t} x) = -x e^{-t} \Big|_{t=0} = -x.$$

Забелешка 2.2: Неподвижни точки на потокот се јавуваат сингуларните точки на полето на фазни брзини т.е. точки во кои векторот на фазната брзина станува нула во нив и обратно.

Теорема 2.1: Нека фиксираме точка x_0 и нека го разгледаме нејзиното движење под дејство на фазниот поток g^t . Со други зборови да го разгледаме пресликувањето $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$ дефинирано со $\varphi(t) = g^t x_0$. Пресликувањето φ се јавува како решение на диференцијалната равенка $x' = v(x)$ со почетен услов $\varphi(0) = x_0$ (и обратно). Тоа значи дека под дејство на фазниот поток фазната точка се движи така што векторот на нејзината брзина во секој момент на време е еднаков со векторот на фазната брзина во таа точка од фазниот простор каде движечката точка се наоѓа.

Доказ: Од $\varphi(0) = g^0 x_0 = x_0$ следува дека почетниот услов е задоволен (g^0 е идентична трансформација). Нека $\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t)$ е прв извод на φ во точката t . Тоа може да се запише $\varphi'(t) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \varphi(\tau)$, τ - променлива. Од дефиницијата на φ следува $\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \varphi(\tau) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} g^\tau x_0$ и со воведување на смена $u = \tau - t$ каде u е новата променлива, се добива дека последниот израз е еквивалентен со изразот $\frac{d}{du} \Big|_{u=0} (g^{u+t} x_0) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} (g^u g^t x_0) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} g^u (g^t x_0) =$ (од дефиницијата на $v(x)$) $= v(g^t x_0) = v(\varphi(t)) \Rightarrow \varphi(t)$ е решение на равенката $x' = v(x)$ (од произволноста на t следува дека важи за секое t).

На тој начин со секоја ЕПГД е поврзана диференцијална равенка (зададена со векторско поле од фазни брзини) чие решение се јавува како движење на фазните точки под дејство на фазниот поток. Ако фазниот поток опишува било каков процес при произволни почетни услови тогаш диференцијалната равенка зададена со нејзиното векторско поле од фазни брзини го определува локалниот закон на еволуција на процесот. Теоријата на диференцијалните равенки е должна, знаејќи го тој закон на еволуција, да го констатира минатото и да ја претскаже иднината. Формулирањето на било кој природен закон во вид на диференцијална равенка сведува било која задача за еволуција на процесот (физички, хемиски, еколошки, биолошки и др.) кон геометриска задача за однесувањето на фазните криви на даденото векторско поле во соодветниот фазен простор.

Дефиниција 2.8: **Фазен поток** на диференцијалната равенка $x' = v(x)$ се нарекува ЕПГД за која v се јавува како векторско поле на фазни брзини.

За да се најде фазниот поток на диференцијалната равенка, доволно е таа да се реши. $g^t x_0$ е вредноста на решението φ во моментот t со почетен услов $\varphi(0) = x_0$.

Пример 2.9: Фазниот поток на диференцијалната равенка $x' = kx$ е групата $\{e^{kt}\}$. Фазен поток на диференцијалната равенка на мали осцилации на математичко нишало ($x'_1 = x_2$, $x'_2 = -x_1$) се состои од ротации на рамнина за агол t , а фазен поток на диференцијалната равенка на обрнато математичко нишало ($x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_1$) се состои од хиперболички искривувања.

Пример 2.10: Да се најдат фазните потоци на диференцијалната равенка:

а) $x' = 0$, б) $x' = 1$, в) $x' = x - 1$, г) $x' = \sin x$, $0 < x < \pi$.

Решение:

а) $x' = 0 \Rightarrow x = C = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(0) = x_0 \Rightarrow C = x_0 \Rightarrow \varphi(t) = x_0 \Rightarrow g^t x_0 = \varphi(t) = x_0 \Rightarrow g^t x = x$;

б) $x' = 1 \Rightarrow x = t + C = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(0) = x_0 \Rightarrow C = x_0 \Rightarrow \varphi(t) = t + x_0 \Rightarrow g^t x_0 = \varphi(t) = t + x_0 \Rightarrow g^t x = t + x$;

в) $x' = x - 1 \Rightarrow x - 1 = e^{t+C} \Rightarrow x = e^{t+C} + 1 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(0) = x_0 \Rightarrow e^C = x_0 - 1 \Rightarrow \Rightarrow \varphi(t) = (x_0 - 1)e^t + 1 \Rightarrow g^t x_0 = \varphi(t) = (x_0 - 1)e^t + 1 \Rightarrow g^t x = (x - 1)e^t + 1$;

г) $x' = \sin x \Rightarrow \ln(\operatorname{tg} x / 2) = t + C \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} e^{t+C} = \varphi(t) \Rightarrow \varphi(0) = x_0 = 2 \operatorname{arctg} e^C \Rightarrow \Rightarrow e^C = \operatorname{tg} x_0 / 2 \Rightarrow g^t x_0 = 2 \operatorname{arctg}(e^t \operatorname{tg}(x_0 / 2)) \Rightarrow g^t x = 2 \operatorname{arctg}(e^t \operatorname{tg}(x / 2))$.

Пример 2.11: Најдете ги фазните потоци на системите диференцијални равенки:

а) $x' = y$, $y' = 0$; б) $x' = y$, $y' = 1$; в) $x' = \sin y$, $y' = 0$.

Решение: а) $(x + ty, y)$; б) $(x + ty + (t^2/2), y + t)$; в) $(x + t \sin y, y)$

а) $y' = 0 \Rightarrow y = c = \varphi_2(t)$; $\varphi_2(0) = y_0 \Rightarrow c = y_0 \Rightarrow \varphi_2(t) = y_0 \Rightarrow g^t y = y$

$x' = y \Rightarrow x'' = y' = 0 \Rightarrow x' = c$; $x' = y = c \Rightarrow$ (од погоре) $c = y_0 \Rightarrow x' = y_0 \Rightarrow x = y_0 t + c_1$; $\varphi_1(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = c_1 \Rightarrow x = y_0 t + x_0 \Rightarrow g^t x = y t + x$

б) $y' = 1 \Rightarrow y = t + c = \varphi_2(t)$; $\varphi_2(0) = y_0 \Rightarrow y_0 = c \Rightarrow \varphi_2(t) = t + y_0 \Rightarrow g^t y = y + t$

$x'' = y' = 1 \Rightarrow x' = t + c$; $x' = y = t + c \Rightarrow c = y_0 \Rightarrow x' = t + y_0 \Rightarrow x = t^2/2 + y_0 t + c_1 = \varphi_1(t)$

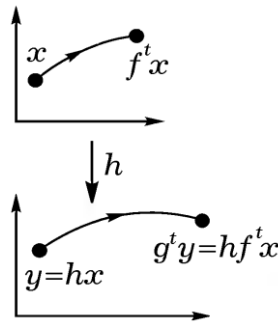
$\varphi_1(0) = x_0 = c_1 \Rightarrow x = t^2/2 + y_0 t + x_0 \Rightarrow g^t x = t^2/2 + y t + x$

в) $g^t y = y$ (наоѓаме исто како во а))

$x' = \sin y \Rightarrow x = t \sin y + c = \varphi_1(t)$; $x_0 = \varphi_1(0) \Rightarrow c = x_0 \Rightarrow x = t \sin y + x_0 \Rightarrow g^t x = x + t \sin y$

Основен метод за решавање и изучување на диференцијалните равенки е изборот на соодветна смена на променливите т.е. со геометриски термини избор на соодветен дифеоморфизам, кој ќе го поедностави даденото векторско поле или полето на правци.

Дефиниција 2.9: Нека $\{f^t\}$ и $\{g^t\}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ се фазни потоци. **Потоците** $\{f^t\}$ и $\{g^t\}$ **се еквивалентни** ако постои взаемно еднозначна трансформација $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ која го пресликува потокот $\{f^t\}$ во потокот $\{g^t\}$ така што $h \circ f^t = g^t \circ h$ за било кое $t \in \mathbb{R}$ (цртеж 2.3).



Цртеж 2.3
Еквивалентни потоци

Можеме да кажеме дека потокот $\{f^t\}$ се трансформира во потокот $\{g^t\}$ со замена на координатите h . При тоа потоците се нарекуваат:

- 1) **линеарно еквивалентни** ако h е линеарен изоморфизам, $h \in GL(\mathbb{R}^n)$
- 2) **диференцијабилно еквивалентни** ако h е дифеоморфизам
- 3) **тополошки еквивалентни** ако h е хомоморфизам т.е. взаемно еднозначна и взаемно непрекината трансформација.

Забелешка 2.3: Од линеарна произлегува диференцијабилна а од диференцијабилна произлегува тополошка еквивалентност.

Забелешка 2.4: Трансформацијата h фазните криви на потокот $\{f^t\}$ ги трансформира во фазни криви на потокот $\{g^t\}$.

3. ЛИНЕАРНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ. СПЕКТРАЛНА АНАЛИЗА

Општи поими

Класата линеарни системи диференцијални равенки е најмногу изучена класа и за неа постои скоро комплетна теорија. Таа теорија всушност се базира на делови од линеарна алгебра кои дозволуваат комплетно решение на сите автономни системи. Оваа теорија секако е корисна и при изучувањето на нелинеарните задачи после нивната соодветна линеаризација. На пример, таа помага да се изучи стабилноста на рамнотежната состојба преку тополошки тип на сингуларните (критичните) точки на векторското поле и во општите случаи.

Да разгледаме диференцијална равенка зададена со векторско поле v во фазен простор. Знаеме дека во околината на несингуларните точки ($v \neq 0$) тоа поле е едноставно конструирано, тоа дефинира дифеоморфизам. Да ја разгледаме сега конструкцијата на полето во околина на рамнотежните точки т.е. точки каде векторите на полето се изедначуваат на нула. Таквата точка x_0 се јавува како сингуларно решение на нашата равенка. Ако равенката опишува било каков физички процес, тогаш x_0 е стационарна состојба на процесот, негова рамнотежна состојба. Според тоа изучувањето на околината на сингуларната точка е изучување на тоа како ќе се развива процесот при мали осцилации (отклонувања-промени) на почетните услови од рамнотежните (на пример горната и долната рамнотежна состојба кај нишалото).

При изучувањето на векторското поле во околина на точката x_0 , каде векторот на полето е еднаков на нула, природно е да се развие полето во околината на таа точка во ред според формулата на Тајлор. Првиот член на Тајлоровиот ред е линеарен. Изоставувањето на останатите членови се вика **линеаризација** и линеаризираното векторско поле може да се разгледува како пример на векторско поле со сингуларна точка x_0 . Од друга страна може да се надеваме дека однесувањето на решението на почетната и решението на линеаризираната равенка е блиско (бидејќи при линеаризација се изоставуваат бесконечно мали членови од повисок ред). Значи за проблемот околу врската меѓу решенијата на почетната и линеаризираната равенка е потребно специјално изучување. Тоа изучување се базира на соодветна анализа на линеарните равенки.

Од друга страна задачата за опишување на еднопараметарската група линеарни трансформации на линеарниот простор R^n се сведува на задача за решавање на линеарни диференцијални равенки.

Нека $\{g^t, t \in R\}$ е ЕПГЛТ каде g^t се диференцијабилни во однос на променливите x и t и нека го разгледаме движењето $\varphi: R \rightarrow R^n$ на точката $x_0 \in R^n$.

Нека $A: R^n \rightarrow R^n$ е линеарен оператор дефиниран со релацијата $Ax = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}^n$. Тогаш $\varphi(t)$ е решение на диференцијалната равенка $x' = Ax$ со почетен услов $\varphi(0) = x_0$. Со други зборови под дејство на фазниот поток фазната точка се движи така што векторот на нејзината брзина во секој временски момент е еднаков на векторот на фазната брзина во онаа точка од фазниот простор каде движечката точка се наоѓа. Според тоа за опишувањето на ЕПГЛТ доволно е да се изучат решенијата на линеарната равенка $x' = Ax$ (взаемно еднозначно бидејќи секој оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е зададен со ЕПГЛТ $\{g^t\}$).

Дефиниција 3.1: Нека $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор. **Линеарна диференцијална равенка** се нарекува равенката $x' = Ax$ со фазен простор \mathbb{R}^n , зададена со векторско поле $v(x) = Ax$.

Ако во \mathbb{R}^n е фиксиран координатен систем $x_i, i=1, \dots, n$, тогаш равенката $x' = Ax$ може да се запише во вид на систем од n равенки $x_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i=1, \dots, n$ каде $[a_{ij}]$ е матрицата на операторот A во разгледуваниот координатен систем (матрица на системот).

Според тоа, матричната диференцијална равенка $v(x) = Ax$ е *систем од n линеарни хомогени диференцијални равенки од прв ред со константни коефициенти*.

Множеството L од сите линеарни оператори $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен простор над полето \mathbb{R} . Нека во \mathbb{R}^n е дефинирана норма $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ каде (x, y) е скаларен производ на точките (векторите) x и y и нека со $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ е дефинирана норма на линеарниот оператор A . Ако се дефинира растојание (метрика) меѓу линеарните оператори A и B со $\rho(A, B) = \|A - B\|$ тогаш L е комплетен метрички простор (Банахов или Хилбертов).

Решението на равенката $x' = Ax$ со почетен услов $\varphi(0) = x_0$ во случајот $n=1$ е дадено со експоненцијалната функција $\varphi(t) = e^{At}x_0$.

Се покажува дека и за било кое $n \in \mathbb{N}$ решението има исти облик, така што е потребно да се изучи и објасни експонент од оператор.

Дефиниција 3.2: Нека $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор. **Операторот e^A** се дефинира на два еквивалентни начина: како граница и како сума на степенски ред:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{n} \right)^n,$$

каде E означува единична матрица односно оператор.

Операторот \mathbf{A} (линеарен и конечнодимензионален) е зададен со матрица \mathbf{A} . Ако матрицата на еден оператор \mathbf{A} (во однос на некоја база) е дијагонална тогаш тој оператор се вика *дијагонален*, таа база се вика *сопствена база* и сите сопствени вредности на тој оператор се реални. Ако пак сите сопствени вредности на еден оператор се реални и различни тогаш тој е дијагонален.

Ако матрицата на операторот \mathbf{A} е дијагонална со дијагонални елементи $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ тогаш и соодветната матрица на операторот $e^{\mathbf{A}}$ е дијагонална со дијагонални елементи $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$.

Детерминатата на еден оператор е детерминанта на матрицата на операторот во однос на било која база. Имено, ако \mathbf{A} е матрица на еден оператор во однос на една база, а \mathbf{B} матрица на истиот оператор но во однос на друга база, тогаш тие се слични матрици и важи $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$, каде \mathbf{P} е матрицата на премин од едната во другата база (се добива со сопствените вектори). Според тоа детерминантата, $\text{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, како и сопствените вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на еден оператор, се инваријантни бројни карактеристики во однос на базите. При тоа детерминантата е еднаква на производот на сите сопствени вредности, а $\text{tr}\mathbf{A}$ е еднаков на сумата од сите сопствени вредности на еден оператор.

Пример 3.1: Нека $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ е матрица на операторот $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ во однос на основната база $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Од $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ се добиваат сопствените вредности на операторот: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Бидејќи сопствените вредности се реални и различни, операторот \mathbf{A} ќе биде дијагонален. Според тоа постои негова дијагонална матрица $\mathbf{A}^d = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ во однос на сопствената база. Значи соодветната матрица на операторот $e^{\mathbf{A}}$, кој е исто така дијагонален во однос на истата сопствена база, е $\mathbf{B}^d = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

За да се вратиме на основната база, треба да извршиме трансформација со помош на матрицата на премин. Од $\mathbf{A}x = \lambda x$ се добиваат сопствените вектори $(1, 1)$, $(1, -1)$. Значи матрицата на премин од основната база во сопствената база составена од сопствените вектори е $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. На крај се добива матрицата $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^d\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{bmatrix}$ на операторот $e^{\mathbf{A}}$ во однос на основната база.

Пример 3.2: Нека $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ е матрица на операторот $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ во однос на основната база $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Од $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ се добиваат сопствените вредности на операторот, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$ и бидејќи се реални и различни операторот

A е дијагонална. Според тоа постои негова дијагонална матрица $A^d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ во однос на сопствената база. Значи соодветната матрица на операторот e^A , кој е исто така дијагонална во однос на истата сопствена база, е $B^d = \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix}$.

За да се вратиме на основната база, треба да извршиме трансформација со помош на матрицата на премин. Од $Ax = \lambda x$ се добиваат сопствените вектори $(-1, 1)$, $(3, 4)$. Значи матрицата на премин од основната база во сопствената база составена од сопствените вектори е $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = -(1/7) \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. На крај ја добиваме матрицата $B = P^{-1}B^dP = (1/7) \begin{bmatrix} 4e^{-2} + 3e^5 & 12e^5 - 12e^{-2} \\ e^5 - e^{-2} & 3e^{-2} + 4e^5 \end{bmatrix}$ на операторот e^A во однос на основната база.

Нека $A: R^n \rightarrow R^n$ е линеарен оператор. Фамилијата од сите линеарни оператори од вид $e^{tA}: R^n \rightarrow R^n$, $t \in R$ (A фиксен) образуваат ЕПГЛТ, т.е. важи: $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$. Ова едноставно се докажува преку дефиницијата на операторот e^A со степенски ред и рамномерната и апсолутната конвергенција на редот.

Теорема 3.1: Основна теорема на теоријата линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти: Решението $x = \varphi(t)$ на равенката $x' = Ax$, со почетен услов $\varphi(0) = x_0$, е дадено со формулата $\varphi(t) = e^{tA}x_0$.

Навистина, $\frac{d\varphi}{dt} = Ae^{tA}x_0$, $\varphi(0) = e^0x_0 = x_0$.

Теорема 3.2: (обратна врска на оператор и ЕПГЛТ) Нека $\{g^t: R^n \rightarrow R^n\}$ е ЕПГЛТ. Тогаш постои линеарен оператор $A: R^n \rightarrow R^n$ така што $g^t = e^{tA}$.

Доказ: Нека дефинираме оператор $A = \left. \frac{dg^t}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^t - E}{t}$. Знаеме дека движењето $\varphi(t) = g^t x_0$ е решение на равенката $x' = Ax$ со почетен услов $\varphi(0) = x_0$ па во согласност со формулата $\varphi(t) = e^{tA}x_0$ се добива $g^t x_0 = e^{tA}x_0$ од каде $g^t = e^{tA}$.

На тој начин добивме взаемно еднозначна релација меѓу линеарните диференцијални равенки $x' = Ax$ и нивните потоци $\{g^t\}$ и при тоа фазниот поток се состои од линеарни дифеоморфизми.

Геометриски детерминантата на еден оператор е ориентиран волумен на n димензионален паралелопипед образуван од ребра зададени како вектор-колониите на соодветната матрица репрезент. Според тоа бидејќи детерминантата на еден оператор е инваријантна на промената на базите во однос на кои е дадена матрицата репрезент, волумените на сите така дефинирани паралелопипеди се

еднакви. Ориентацијата е во согласност со ориентацијата на векторите од основната база. Според тоа детерминантата на операторот е ориентиран волумен на сликата на единична n димензионална коцка (паралелопипед со волумен 1 со ребра базните вектори на основната база) при трансформацијата \mathbf{A} . Значи при трансформацијата \mathbf{A} на било која фигура нејзиниот волумен се менува $\det \mathbf{A}$ пати.

Теорема 3.3: Нека $\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор, и $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$. Тогаш важи: $\det(\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{A}) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} \mathbf{A} + O(\varepsilon^2)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ (O - Ландау симбол).

Доказ: Нека λ_i се сопствени вредности на операторот \mathbf{A} . Тогаш $1 + \varepsilon \lambda_i$ ќе бидат сопствени вредности на операторот $\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \text{Навистина, } \det((\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{A}) - \lambda^* \mathbf{E}) &= \det(\varepsilon \mathbf{A} - (\lambda^* - 1) \mathbf{E}) = \varepsilon \det(\mathbf{A} - ((\lambda^* - 1)/\varepsilon) \mathbf{E}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\lambda^* - 1)/\varepsilon = \lambda \Rightarrow \lambda^* = 1 + \varepsilon \lambda. \end{aligned}$$

Според тоа $\det(\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i)$ (детерминантата на операторот е производ од неговите сопствени вредности) а последниот производ е еднаков на $1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, со што теоремата е докажана.

Теорема 3.4: Нека $\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор. Тогаш важи $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr} \mathbf{A}}$.

Доказ: Од дефиницијата на операторот $e^{\mathbf{A}}$ следи $\det e^{\mathbf{A}} = \det \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\det \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^m \right)$.

Од друга страна $\det \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{m} \right)^m = \left(\det \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{m} \right) \right)^m = \left(1 + \frac{1}{m} \operatorname{tr} \mathbf{A} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right)^m$ кога $m \rightarrow \infty$ (искористена претходната теорема за $\varepsilon = (1/m)$). Значи, $\det e^{\mathbf{A}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \operatorname{tr} \mathbf{A} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right)^m = e^{\operatorname{tr} \mathbf{A}}$. Со ова теоремата е докажана.

Бидејќи $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\operatorname{tr} \mathbf{A}} > 0$, операторот $e^{\mathbf{A}}$ ја запазува ориентацијата и е несингуларен. Бидејќи $\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$ тоа значи дека фазниот поток на линеарната диференцијална равенка $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ за време t го менува волуменот на било која фигура $e^{t \operatorname{tr} \mathbf{A}}$ пати. Навистина, $\det \mathbf{g}^t = \det e^{\mathbf{A}t} = e^{t \operatorname{tr} \mathbf{A}}$.

Последица 3.1: Ако $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 0$ тогаш фазниот поток ги запазува волумените т.е. потокот ја пресликува било која фигура во фигура со ист волумен.

Пример 3.3: Равенката на нишало $\mathbf{x}'' = -\mathbf{x} + k \mathbf{x}'$ со коефициент на триење $-k$ е еквивалентна на системот $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1 + k x_2$ врзан за координатен систем $(x_1 = x, x_2 = x')$, со соодветна матрица $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{bmatrix}$. Очевидно $\operatorname{tr} \mathbf{A} = k$ па за $k < 0$ линеарната

трансформација на фазниот поток g^t ($t>0$) ја пресликува било која област од фазната рамнина во област со помала плоштина (за $k>0$ со поголема плоштина). За $k=0$ се запазува плоштината но областа ротира за агол t .

При практичното решавање на диференцијалните равенки операторот A е зададен со својата матрица во однос на некоја база и треба да се пресмета матрицата на операторот e^A во однос на истата база. Нека $x'=Ax$ е диференцијална равенка и нека операторот A е дијагонален оператор. Тогаш проблемот е решлив

ако матрицата на операторот A е дијагонална од вид
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$
 каде $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ се

сопствени вредности, така што матрицата на операторот e^{At} ќе биде дијагонална

од вид
$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$
 Значи решението φ со почетни услови $\varphi_0(0)=(x_{10}, \dots, x_{n0})$ во

однос на таа база ќе има облик $\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} x_{k0}$, $k=1, \dots, n$ ($\varphi(t)=e^{tA}x_0$). Во однос на таа база треба да се премине и ако матрицата на операторот A е дадена во однос на друга база.

Да се потсетиме дека ако сите сопствени вредности на операторот A се реални и различни тогаш тој е дијагонален. Според тоа ако матрицата на операторот A не е дијагонална, но операторот може да се дијагонализира, т.е. сопствените вредности се реални и различни, тогаш решавањето на диференцијалната равенка ќе се состои во следните 5 чекори:

- 1) се наоѓа карактеристичната равенка $\det(A-\lambda E)=0$;
- 2) се наоѓаат сите сопствени вредности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;
- 3) се наоѓаат соодветните сопствени вектори ξ_1, \dots, ξ_n , $\xi_k \neq 0$, од матричната равенка $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$, $k=1, \dots, n$;

- 4) се развива почетниот услов во однос на сопствените вектори $x_0 = \sum_1^n c_k \xi_k$

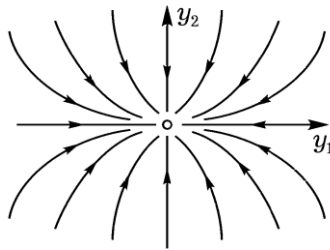
- 5) се наоѓа решението $\varphi(t) = \sum_1^n c_k e^{\lambda_k t} \xi_k$. Тоа пак значи дека за дијагонален

оператор A елементите на матрицата e^{At} во однос на било која база се линеарна комбинација од експонентите $e^{\lambda_k t}$ каде λ_k се сопствените вредности на A (наистина, $\varphi(t)=e^{tA}x_0 = \sum_1^n c_k \xi_k e^{\lambda_k t}$).

Пример 3.4: Да го разгледаме примерот со математичкото нишало со триење $x_1'=x_2$, $x_2'=-x_1-kx_2$. Матрицата на системот е $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$, $\text{tr}A=-k$, $\det A=1$, а

карактеристичка равенка е $\det(A-\lambda E)=\lambda(k+\lambda)+1=0$. Сопствените вредности се реални и различни ако дискриминантата на равенката е позитивна, т.е. $D=k^2-4>0$. Според тоа при доволно големо k (по апсолутна вредност) операторот A е дијагонален, $\lambda_{1/2}=\frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$.

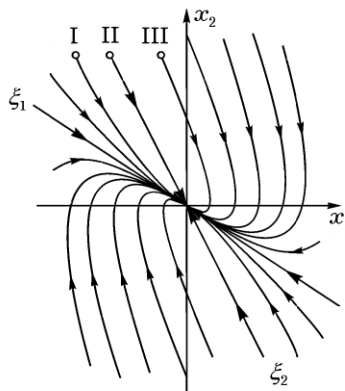
Нека $k>2$. Тогаш λ_1 и λ_2 се негативни ($\sqrt{k^2-4} < \sqrt{k^2}=k$) реални и различни, што значи дека нашиот оператор е дијагонален и во однос на сопствената база има дијагонална матрица $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ и секако во однос на таа база системот може да се запише во вид $y_1'=\lambda_1 y_1$, $y_2'=\lambda_2 y_2$, $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$. Соодветните решенија се $y_1(t)=y_1(0)e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t)=y_2(0)e^{\lambda_2 t}$, а фазните криви се претставени на цртеж 3.1 (сингуларната точка е јазел).



Цртеж 3.1

Фазни криви на нишалото со голем коефициент на триење, во сопствената база

Ако земеме дека $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ за интегралните криви y_1 оската е тангента и $y_2 \rightarrow 0$ побрзо од y_1 . Кога $t \rightarrow \infty$ сите решенија тежат кон 0.



Цртеж 3.2

Фазни криви на равенката на нишалото со голем коефициент на триење, во обична база

Цртежот во рамнината (x_1, x_2) се добива со линеарна трансформација. На пример, нека $k=10/3$. Тогаш $\lambda_1=-1/3$, $\lambda_2=-3$, а сопствените вектори ќе бидат: $\xi_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Бидејќи $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ ќе ги добиеме фазните криви како на цртеж 3.2.

Според цртежот, ако k е доволно големо ($k>2$) тогаш нишалото не прави пригушени осцилации туку веднаш преминува кон рамнотежна положба; неговата брзина x_2 го менува знакот не повеќе од еднаш.

Координизацијата на системите е доста важна алка во анализата на системите (декартови, поларни и други координатни системи).

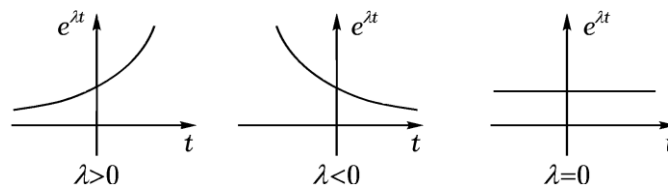
Комплексен случај:

Нека е дадена линеарна диференцијална равенка од вид $\frac{dz}{dt} = \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, каде непознатата функција е комплексна функција $z(t)$ од една реална променлива t . Нејзиното општо решение е комплексната функција $z(t) = Ce^{\lambda t}$ каде C е произволна комплексна константа. Доказот се спроведува со директна замена.

Да најдеме сега едно партикуларно решение $\varphi(t)$ со почетен услов $\varphi(0)=z_0$ т.е. решение од вид $\varphi(t)=e^{\lambda t} z_0$.

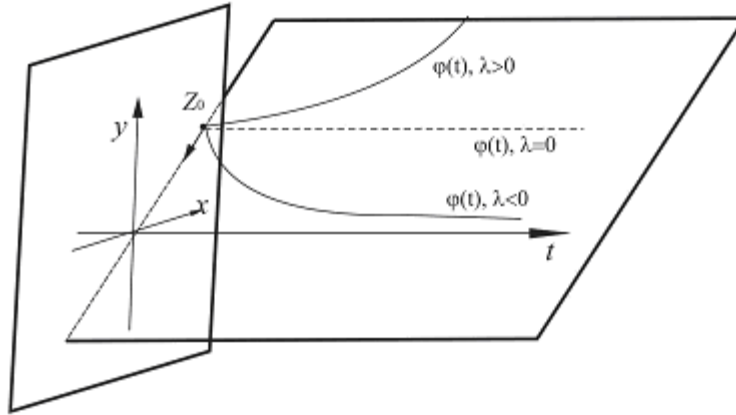
Дискусија за λ :

Ако λ е реален број тогаш функцијата $e^{\lambda t}$ е реална функција од една реална променлива t (цртеж 3.3).



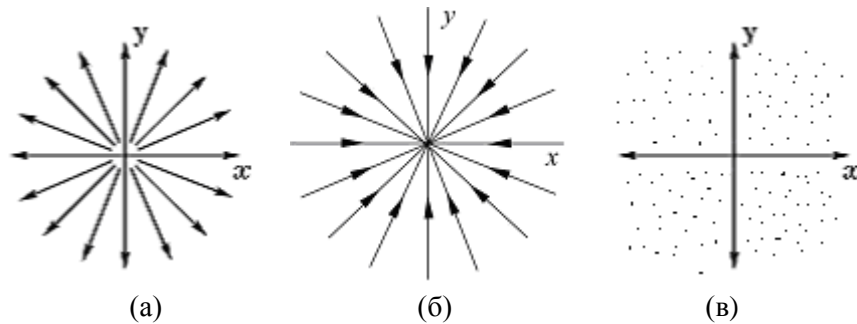
Цртеж 3.3
График на функцијата $e^{\lambda t}$

Во тој случај фазниот поток на диференцијалната равенка ќе се состои од растегнување од $e^{\lambda t}$ пати бидејќи $z=\varphi(t)=e^{\lambda t} z_0$.



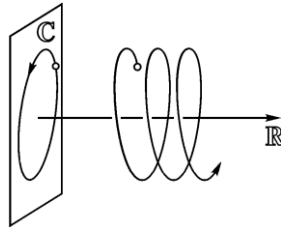
Цртеж 3.4
Фазни и интегрални криви

Може да се види дека критичната точка (сингуларитет) $z=0$ е звездолик јазел и тоа нестабилен ако $\lambda > 0$ и стабилен ако $\lambda < 0$. Фазните криви се прави. За $\lambda = 0$ фазните криви се фиксни точки (стационарни точки без вектор т.е. брзина).



Цртеж 3.5
Фазните криви за (а) $\lambda > 0$, (б) $\lambda < 0$ в) $\lambda = 0$

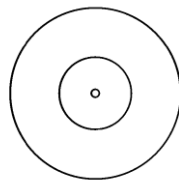
Нека λ е чисто имагинарен ненулта број $\lambda = i\omega$. Тогаш функцијата $e^{\lambda t}$ ќе биде комплексна функција од реална променлива $e^{\lambda t} = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$. Во тој случај фазниот поток на диференцијалната равенка ќе биде вртење за агол ωt т.е. кај фазната точка $z = e^{\lambda t} z_0$ ќе се менува само аргументот за ωt бидејќи $e^{\lambda t} z_0 = e^{i\omega t} z_0$.



Цртеж 3.6

Фазна и интегрална крива на равенката $z' = \lambda z$ во случај кога λ е чисто имагинарен број

Фазните криви се кружници $z = e^{i\omega t} z_0$ со центар во $z=0$ и радиус $|z_0|$, а ω е аголната брзина. Може да се види дека критичната точка (сингуларитет) $z=0$ е центар.

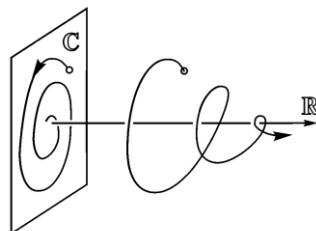


Цртеж 3.7
Центар

Сега да го разгледаме општиот случај кога $\lambda = \alpha + i\omega$. Бидејќи:

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\omega)t} = e^{\alpha t} e^{i\omega t}$$

фазниот поток на диференцијалната равенка ќе биде растегнување од $e^{\alpha t}$ пати и истовремено вртење за агол ωt ,

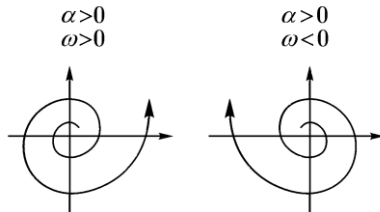


Цртеж 3.8

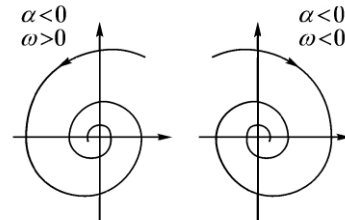
Фазна и интегрална крива на равенката $z' = \lambda z$ во случај кога $\lambda = \alpha + i\omega$, $\alpha < 0$, $\omega > 0$

т.е. фазната точка $z = e^{\alpha t} e^{i\omega t} z_0$ ќе го менува и аргументот за ωt и модулот помножен со $e^{\alpha t}$. За да ги добиеме фазните криви $z = e^{\alpha t} e^{i\omega t} z_0$ ќе преминеме во поларни координати.

Нека $z_0 = 1$ и $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогаш $\rho e^{i\varphi} = e^{\alpha t} e^{i\omega t}$ од каде $\rho = e^{\alpha t}$, $\varphi = \omega t + 2k\pi$. Со елиминација на t (за да се добијат фазните криви) се добива $t = (\varphi/\omega)$, $\rho = e^{\alpha(\varphi/\omega)}$. Значи фазните криви се логаритамски спирали $\rho = e^{k\varphi}$, $k = (\alpha/\omega)$. Критичната точка $z=0$ е фокус и тоа стабилен ако $\alpha < 0$, $\omega > 0$ или $\alpha < 0$, $\omega < 0$, и нестабилен ако $\alpha > 0$, $\omega > 0$ или $\alpha > 0$, $\omega < 0$.



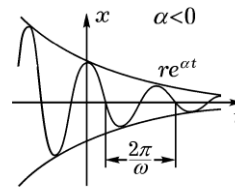
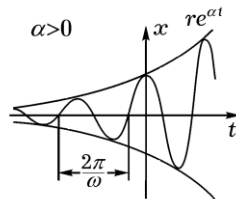
Цртеж 3.9
Нестабилни фокуси



Цртеж 3.10
Стабилни фокуси

Останува уште да ги видиме менувањата на реалниот и имагинарниот дел на координатите на фазната точка при нејзино движење (промена со времето):

$z = e^{\lambda t} z_0 = e^{(\alpha+i\omega)t} z_0 = e^{\alpha t} e^{i\omega t} z_0$, $z = x + iy$, $x(t) = r_0 e^{\alpha t} \cos(\psi_0 + \omega t)$, $y(t) = r_0 e^{\alpha t} \sin(\psi_0 + \omega t)$, каде r_0 , ψ_0 се константи кои се определуваат од почетниот услов.



Цртеж 3.11
Функцијата $x(t)$ како функција од времето

За менувањето на имагинарниот дел $y(t)$ го добиваме истото, само фазните криви се поместени (минуваат низ координатниот почеток).

Според тоа за $\alpha > 0$ координатите $x(t)$ и $y(t)$ ги даваат хармониските осцилации со фреквенција и со експоненцијално растечка амплитуда $r_0 e^{\alpha t}$, а при $\alpha < 0$ добиваме пригушени осцилации.

Со $z(t) = x(t) + iy(t)$ и $\lambda = \alpha + i\omega$ од една диференцијална равенка се добива системот $x' = \alpha x - \omega y$, $y' = \omega x + \alpha y$ кој има матрица $\begin{bmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{bmatrix}$ чии сопствени вредности се $\alpha \pm i\omega$. Значи ако реалниот дел на сопствените вредности е позитивен, системот не е стабилен, а ако е негативен, системот е стабилен.

Последица 3.2: Нека $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е произволна линеарна равенка. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ се различни корени на карактеристичната равенка. Тогаш секое решение φ има вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \xi_k$$

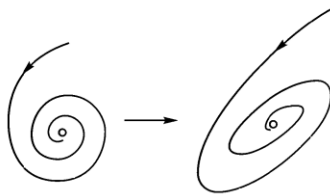
каде ξ_k се сопствените вектори кои не зависат од почетните услови, додека коефициентите c_k зависат од почетните услови.

Класификација на сингуларните точки

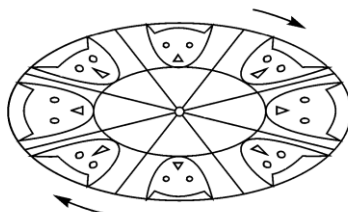
Последица 3.3: Нека $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ е линеарна трансформација на Евклидовата рамнина \mathbb{R}^2 со нереални сопствени вредности $\lambda, \bar{\lambda}$. Тогаш трансформацијата A е афино пресликување еквивалентно на растегнување за $|\lambda|$ пати и ротација за агол $\arg \lambda$.

Последица 3.4: Фазниот поток на линеарната равенка $x' = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$ на Евклидовата рамнина \mathbb{R}^2 со нереални сопствени вредности $\lambda, \bar{\lambda} (= \alpha \pm i\omega)$ е афино еквивалентен со семејството на растегнување за $e^{\alpha t}$ пати со едновремена ротација за агол ωt .

Всушност сингуларната точка 0 е фокус, а фазните криви се афини слики на логаритамски спирали, кои се приближуваат кон координатниот почеток при $t \rightarrow +\infty$ во случајот кога $\alpha < 0$, и се оддалечуваат од координатниот почеток во случајот кога $\alpha > 0$ (цртеж 3.12).



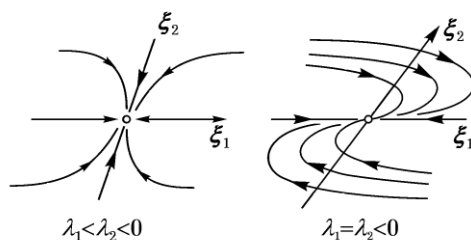
Цртеж 3.12
Афина слика на логаритамска спирала



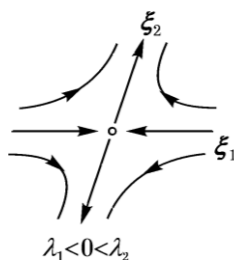
Цртеж 3.13
Елиптичка ротација

Во случајот кога $\alpha=0$ фазните криви се семејство концентрични елипси, а сингуларната точка нивни центар. Во тој случај трансформацијата на фазниот поток се нарекува **елиптичка ротација** (цртеж 3.13).

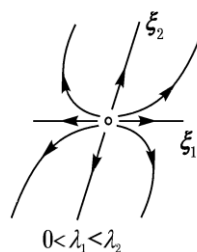
Нека $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ е произволна линеарна равенка во рамнина. Нека λ_1, λ_2 се различни корени на карактеристичната равенка. Ако корените се реални и различни тогаш равенката се распаѓа на две еднодимензионални и добиваме еден од случаите проучени во глава 1. (цртеж 3.14, 3.15 и 3.16).



Цртеж 3.14
Стабилни јазли

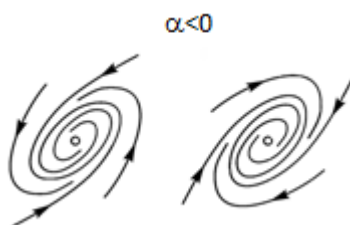


Цртеж 3.15
Седло

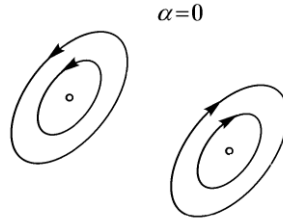


Цртеж 3.16
Нестабилан јазол

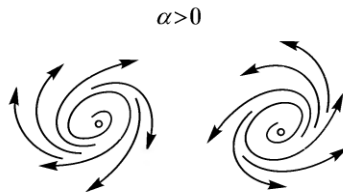
Овде ќе го изоставиме граничниот случај кога λ_1 или λ_2 е нула бидејќи неговото проучување е многу едноставно. Ако корените се коњутирано-комплексни, $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\omega$ тогаш во зависност од знакот на α се добива еден од случаите претставени на цртеж 3.17, 3.18 и 3.19.



Цртеж 3.17
Стабилен фокус



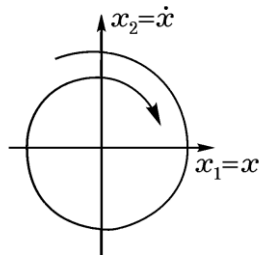
Цртеж 3.18
Центар



Цртеж 3.19
Нестабилни фокуси

Случајот кога имаме центар е доста важен и се среќава на пример кај конзервативниот систем.

Пример 3.5: Кај нишалото со триење се добива равенката $x'' = -x - kx'$ (k -коэффициент на триење) односно системот $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1 - kx_2$. Матрицата на системот е $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$ со $\text{tr}A = -k$ и $\det A = 1$. Корените на карактеристичната равенка $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$, за $|k| < 2$ се комплексни. Реалниот дел е $\alpha = -(k/2)$. Со други зборови за позитивен но не многу голем коэффициент на триење ($0 < k < 2$) долната рамнотежна положба на нишалото ($x_1 = x_2 = 0$) ќе биде стабилен фокус. При $k \rightarrow 0$ фокусот поминува во центар. Колку што е помал коэффициентот толку повеќе фазната точка ќе се приближува кон рамнотежната положба за $t \rightarrow \infty$ (цртеж 3.20).



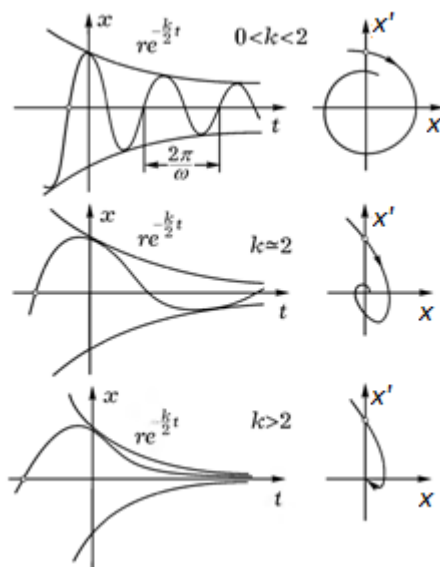
Цртеж 3.20
Фазна рамнина на нишалото со мало триење

Формулата кај комплексниот случај, за $x=x_1$ за промена со времето е дадена со

$$x(t) = re^{\alpha t} \cos(\varphi - \omega t) = Ae^{\alpha t} \cos \omega t + Be^{\alpha t} \sin \omega t$$

каде r и φ (или A и B) се определуваат од почетните услови. Така осцилациите на нишалото ќе се пригушуваат со променлива амплитуда $re^{\alpha t}$ и со период $(2\pi/\omega)$. Што е поголем коефициентот на триење толку се намалува амплитудата. Фреквенцијата $\omega = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$ се намалува со зголемување на коефициентот на триење

к. Кога $k \rightarrow 2$ фреквенцијата се стреми кон 0 а периодот кон ∞ (цртеж 3.21).



Цртеж 3.21

Премин од пригушени осцилации во непригушено движење на нишалото: фазните криви при трите различни вредности на коефициентот на триење и графициите на решенијата

За мали вредности на k , кога $k \rightarrow 0$, $\omega \approx 1 - (k^2/8)$, така што триењето го зголемува периодот доста незначително и неговото влијание на фреквенцијата во многу пресметки може да се занемари.

Нека сега е даден системот $x' = Ax$ од линеарни диференцијални равенки од прв ред, каде $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор. Линеарниот систем се распаѓа на директен производ од еднодимензионални и дводимензионални фазни простори ако карактеристичната равенка нема кратни корени.

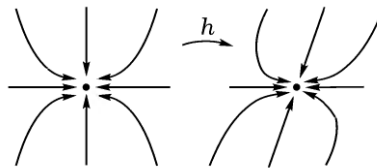
Последица 3.5: Нека $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ е решение на системот $x' = Ax$ од линеарни диференцијални равенки од прв ред со матрица A . Нека сите корени на соодветната карактеристична равенка се прости. Тогаш секоја од функциите φ_m е линеарна

комбинација од функциите $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t$, $e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t$, каде λ_k се реални, а $\alpha_k \pm i\omega_k$ комплексни корени.

Секоја класификација се засновува на некоја релација на еквивалентност. Според тоа постојат најмногу три релации на еквивалентност за линеарните системи, соодветни на алгебарски, диференцијабилни и тополошки приоди.

Теорема 3.5: Нека $\mathbf{A}, \mathbf{B}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ се линеарни оператори чии сопствени вредности се прости. Тогаш системите $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y}$ се линеарно еквивалентни тогаш и само тогаш кога сопствените вредности на операторите \mathbf{A} и \mathbf{B} се исти.

Доказ: Нека системите се линеарно еквивалентни т.е. постои линеарен изоморфизам \mathbf{h} така што $\mathbf{B} = \mathbf{h}\mathbf{A}\mathbf{h}^{-1}$ (црт. 3.22).



Цртеж 3.22
Линеарно еквивалентни системи

Бидејќи $\mathbf{y}' = \mathbf{h}\mathbf{x}' = \mathbf{h}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{h}\mathbf{A}\mathbf{h}^{-1}\mathbf{y}$, сопствените вредности на \mathbf{A} и $\mathbf{B} = \mathbf{h}\mathbf{A}\mathbf{h}^{-1}$ се исти како сопствени вредности на слични матрици. Овде не е битно сопствените вредности да бидат прости.

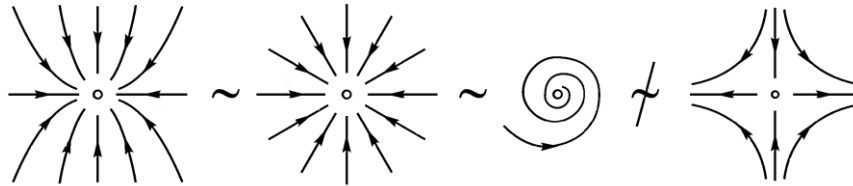
Обратно: Нека сопствените вредности на \mathbf{A} и \mathbf{B} се прости и се исти. Тогаш \mathbf{A} и \mathbf{B} се распаѓаат на директен производ од еднакви (линеарно еквивалентни) еднодимензионални и дводимензионални системи, па нашите системи се линеарно еквивалентни.

Теорема 3.6: Два линеарни системи $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ се диференцијално еквивалентни тогаш и само тогаш кога се линеарно еквивалентни.

Доказот следува од фактот што од линеарна произлегува диференцијабилна еквивалентност.

Теорема 3.7: Два линеарни системи $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ се тополошки еквивалентни тогаш и само тогаш кога матриците \mathbf{A} и \mathbf{B} имаат ист број сопствени вредности со негативен, односно позитивен реален дел. При тоа важно е да немаат сопствени вредности со нула реален дел, односно, да немаат сопствени вредности на имагинарната оска.

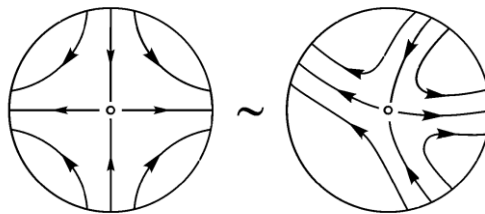
Теоремата кажува дека, на пример, стабилните јазли и фокусите се тополошки еквивалентни еден со друг, но не се еквивалентни со седлото (цртеж 3.23).



Цртеж 3.23

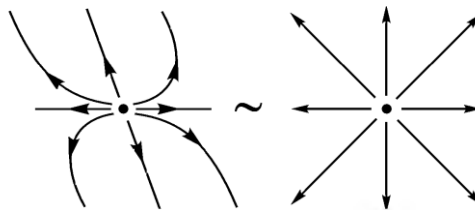
Тополошки еквивалентни и нееквивалентни системи

Лема 3.1: Нека $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор чии сопствени вредности имаат позитивен реален дел. Тогаш системот $x' = Ax$ е тополошки еквивалентен на стандардниот систем $x' = x$.



Цртеж 3.24

Тополошки еквивалентни системи и нивна линеаризација



Цртеж 3.25

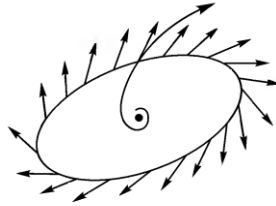
Нестабилни јазли на тополошки еквивалентни системи

Доказот на оваа лема се базира на конструкцијата на една специјална квадратна форма така наречена *функција на Ляпунов*.

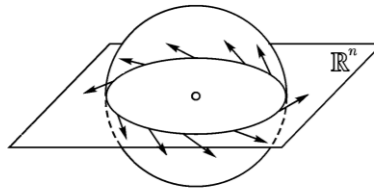
Теорема 3.8: Нека $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор чии сопствени вредности имаат позитивен реален дел. Тогаш во \mathbb{R}^n постои таква евклидова структура така што векторот Ax во секоја точка $x \neq 0$ образува со радиус векторот x остар агол. Со други зборови постои таква позитивно дефинитна квадратна форма r^2 во \mathbb{R}^n , така што изводот по насока на векторското поле Ax е позитивен: $L_{Ax}r^2 > 0$, $x \neq 0$ или

постои елипсоид во \mathbb{R}^n со центар во 0 таков што во секоја негова точка x векторот Ax има насока на надвор.

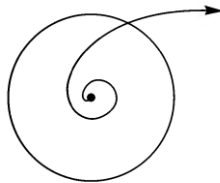
Сите формулации се еквивалентни а ние ќе ја користиме втората. Тврдењето важи и за операторот $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.



Цртеж 3.26
Функцијата на Ляпунџ



Цртеж 3.27
Функцијата на Ляпунџ во \mathbb{R}^n



Цртеж 3.28
Позитивно дефинитна форма во случајот $n=1$

Конструкција на функцијата на Ляпунџ:

Нека $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор. Нека x е радиус вектор на точка со координати во однос на сопствената база на операторот. Дефинираме квадратна форма $r^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, каде $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Очигледно $r^2(x)$ е позитивно дефинитна квадратна форма т.е. $r^2(x) > 0, \forall x$. Нека понатаму $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ се реални и различни сопствени вредности на операторот A . Изводот на $r^2(x)$ по правец дефиниран со векторот Ax , каде A е матрицата на операторот во однос на сопствената база, е даден со формулата:

$$\begin{aligned} L_{Ax} r^2(x) &= (\nabla r^2(x), Ax) = [2x_1 \ 2x_2 \ \dots \ 2x_n] [\lambda_1 x_1 \ \lambda_2 x_2 \ \dots \ \lambda_n x_n]^T = \\ &= 2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2) \end{aligned}$$

каде (a,b) е скаларен производ, $\nabla r^2(x)$ е јакобијан матрица (прв извод) за функцијата $r^2(x)$. Ако сите сопствени вредности на операторот \mathbf{A} се позитивни, тогаш $L_{Ax}r^2(x)>0$, т.е. $L_{Ax}r^2(x)$ е позитивно дефинитна квадратна форма.

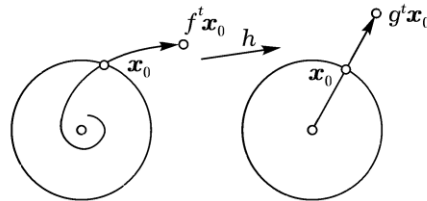
Вака дефинираната квадратна форма $r^2(x)$ е специјална класа функции наречени **функции на Ляпунов**.

На исти начин се покажува дека при вака дефинирана специјална функција на Ляпунов неравенството $L_{Ax}r^2(x)>0$ ќе важи и во случаите кога некои од сопствените вредности на операторот \mathbf{A} се комплексни броеви со тоа што кај нив реалниот дел треба да биде позитивен.

До колку \mathbf{A} не е дијагонална матрица, а операторот \mathbf{A} е дијагонален, тогаш со трансформацијата $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, дефинирана во оваа глава, ќе се добие дијагонална матрица \mathbf{B} .

Забелешка 3.1: Бидејќи $L_{Ax}r^2$ е позитивно дефинитна квадратна форма, ќе важи неравенството $\alpha r^2 \leq L_{Ax}r^2 \leq \beta r^2$ ($\beta>\alpha>0$ – константи).

Хомеоморфизмот $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, кој го пресликува фазниот поток $\{f^t\}$ на равенката $x'=\mathbf{A}x$ ($\text{Re}\lambda_k > 0$) во фазниот поток $\{g^t\}$ на равенката $x'=x$ ќе го конструираме на следниот начин: да ја разгледаме сферата $S=\{x \in \mathbb{R}^n, r^2(x)=1\}$ каде r^2 е функција на Ляпунов. Хомеоморфизмот h ги остава точките од сферата на исто место. Нека x_0 е точка од сферата (црт. 3.29).



Цртеж 3.29
Конструкција на хомоморфизмот h

Точката $f^t x_0$ од фазната траекторија на равенката $x'=\mathbf{A}x$ трансформацијата h ќе ја пресликува во точката $g^t x_0$ од фазна траекторија на равенката $x'=x$.

$$h(f^t x_0) = g^t x_0, \forall t \in \mathbb{R}, x_0 \in S, h(0)=0 \quad (*)$$

Притоа,

1. формулата $(*)$ еднозначно ги определува вредностите на h во било која точка $x \in \mathbb{R}^n$
2. трансформацијата $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е взаемно еднозначна и взаемно непрекината
3. $h \circ f^t = g^t \circ h$

4. ОСНОВНИ ПОИМИ ОД ТЕОРИЈАТА НА ЛЯПУНОВ ЗА СТАБИЛНОСТ НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Работата на доста голем број механички, електрични, електронски и друг тип конструкции (машини, инструменти, регулатори и др.) се опишуваат со системи диференцијални равенки. Кога системите имаат бесконечно множество решенија, за да се најде едно конкретно решение потребно е да се даде негова почетна вредност. Меѓутоа тие конструкции кои се употребуваат во пракса обично работат според конкретно дефиниран режим и во нивната работа, во секој случај на прв поглед, е невозможно да се објасни фактот за можност од бесконечно множество на работни режими кои се соодветни на различни решенија на системот. Тоа може да се објасни било со тоа што почетната вредност на решението при пуштање во работа на конструкцијата се избира на некој дефиниран начин, или пак дека почетната вредност при продолжување на работата на приборот се повеќе го намалува своето влијание и конструкцијата самата ја стабилизира својата работа во стационарно решение. Со последната забелешка ние дури можеме да застанеме ако би ја разбирале работата на електричните кола. Ќе наведеме уште еден пример.

Стрелките на часовникот се движат според точно определен чекор на клатното иако при почетокот клатното може да го пуштиме од поголема или помала висина од вертикалната положба. Ако при почетокот на работата на часовникот клатното недоволно се отклони тогаш по мал број осцилации, ќе застане. Ако пак клатното се отклони доста повеќе, тогаш по кратко време амплитудата на осцилации на клатното ќе биде потполно определена и саатот ќе работи со таа амплитуда неопределено долго, практички бесконечно долго. Според тоа кај системот диференцијални равенки кои ја опишуваат работата на саатот, има две стационарни решенија, рамнотежната положба која соодветствува на отсуството на работа и периодичкото решение кое соодветствува на нормалната работа на саатот. Сите други, а тие решенија се елементи на едно бесконечно множество, доволно брзо се приближуваат кон едно од тие две стационарни решенија, и после некое време практично не се разликуваат од него. Секое од тие две стационарни решенија се јавува во некоја смисла стабилно. Тоа значи дека ако избереме не стационарно решение туку решение кое е различно (отклонето) од стационарното во почетниот момент не премногу јако, тогаш тоа нестационарно решение ќе се приближува кон стационарното.

Тоа не е баш потполна дефиниција на стабилност на решение. На овој пример е очигледно дека фазниот простор на системот равенки кој ја опишува работата на часовникот, се распаѓа на две области на привлекување. Ако се земе почетната вредност во една од тие области тогаш решението ќе се стреми кон рамнотежната положба, ако пак се земе почетна вредност во другата област, тогаш решението ќе се стреми кон периодичното решение. Од овде се гледа дека за потполно разбирање на работата на било кој апарат (устројство) пожелно е да се има добра претстава за фазниот простор на системот равенки, кој ја опишува работата на тој апарат. При тоа е најважно пред се да се знаат сите стабилни решенија на тој систем равенки. Од теоремата за непрекината зависност на

решението од почетните услови знаеме дека ако се зададе определен конечен временски интервал тогаш при доволно мал отклон на почетните услови, решението малку ќе се отклони на целиот зададен временски интервал, но тоа својство на решението воопшто не означува стабилност. Кога станува збор за стабилност, отклонот на неопределено доволно голем временски интервал треба да биде мал ако отклонот на почетните услови е мал.

Во зависност од природата на системот постојат повеќе различни видови на дефинирање на поимот стабилност.

Основни поими за стабилност на линеарни автономни системи. Спектрална анализа.

Првите обиди да се проучи проблемот стабилност се среќаваат во механиката, а потоа со овој проблем се занимавале и научници од многу други дисциплини. Позначајни испитувања на овој проблем се забележани во 1644 год. од страна на **Torricelli**, кој во тоа време искажал некои критериуми за стабилност на рамнотежни системи. Прв кој започнал со изучување на стабилноста во "модерна" смисла бил **Lagrange** (1788), кој анализираше механички системи. Еден од неговите заклучоци е дека, во отсуство на надворешните сили, рамнотежата на конзервативен механички систем е стабилна, под услов да одговара на минимумот на потенцијалната енергија. Неколку истражувачи се надоврзале на методите на Lagrange, но во најголем дел нивната работа била ограничена на конзервативните механички системи опишани од Lagrange-ови равенки на движење. Кон крајот на XIX век, развојот и изучувањето на теоријата на стабилност ја продолжува **Maxwell**. Во 1868 година поставил математички проблем за стабилност на системи со повратна врска на линеарен модел на еден астрономски инструмент. Тој покажал дека проблемот на стабилност на линеарни системи всушност е **алгебарски проблем** за одредување на услови кои треба да ги задоволуваат коефициентите на соодветната карактеристична (алгебарска) равенка, така што сите корени да имаат негативни делови. Овој алгебарски проблем Maxwell го решил делумно, за квадратна и кубна равенка, и заклучил дека во општ случај овој проблем на стабилност не е тривијален. Со проблемот на стабилност се занимавале и Tomson, Zukoski и Poincaré, кој прв дал построено решение на овој проблем.

Поимот за стабилност на рамнотежна положба кај линеарните системи во претходните глави беше воведен повеќе интуитивно, без соодветна строго математичка дефиниција и беше поврзан со спектрална анализа и стационарни точки. Овде прво ќе разгледаме стабилност на решение на диференцијална равенка од n -ти ред и ќе ја поврземе со критериум кој се базира на спектрална анализа.

Дефиниција 4.1: Хомогената линеарна диференцијална равенка

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \dots\dots\dots (1)$$

е **стабилна** ако секое нејзино решение е ограничено за $x \geq x_0$. Равенката (1) е **асимптотски стабилна** ако за секое нејзино решение $y = \varphi(x)$ важи $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

Проблемот за стабилност, односно асимптотска стабилност едноставно се решава кај равенки со константни коефициенти.

Теорема 4.1: Хомогената линеарна диференцијална равенка

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

каде $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, е **стабилна** ако и само ако сите корени на соодветната карактеристична равенка имаат непозитивни реални делови, при што чисто имагинарните корени (доколку постојат) мора да се еднократни.

Доказ: Ако λ е корен на карактеристичната равенка, тогаш согласно условите на теоремата се добива: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha \leq 0$) или $\lambda = \pm i\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$) при што во вториот случај коренот е прост. Ним им одговраат соодветно решенијата $y = \varphi(x)$ од облик:

$$\varphi(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\varphi(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \quad \dots\dots\dots (4)$$

каде $P(x), Q(x)$ се полиноми од x , а C_1, C_2 се константи. Според тоа, во првиот случај се добива

$$|\varphi(x)| \leq |P(x)|e^{\alpha x} + |Q(x)|e^{\alpha x} \leq (|P(x)| + |Q(x)|)e^{\alpha x}$$

и поради тоа што $\alpha \leq 0$, важи:

$$|\varphi(x)| \leq (|P(x)| + |Q(x)|) \leq K, \quad \text{за} \quad x \geq x_0$$

што значи дека решението е ограничено за $x \geq x_0$.

Решението и во другиот случај е ограничено за $x \geq x_0$, бидејќи:

$$|\varphi(x)| \leq |C_1| |\cos \beta x| + |C_2| |\sin \beta x| \leq |C_1| + |C_2| \quad \text{за} \quad x \geq x_0.$$

Општото решение може да се запише во облик на линеарна комбинација на решенија од облик (3) и (4), па затоа, при дадените услови, секое решение е ограничено.

Обратно, ако се претпостави дека секое решение на равенката (2) е ограничено за $x \geq x_0$ и дека барем еден корен на карактеристичната равенка има

позитивен реален дел, или чисто имагинарниот корен е повеќекратен, тогаш лесно се доаѓа до контрадикција.

Слично се утврдуваат потребните и доволните услови за асимптотската стабилност на равенката.

Теорема 4.2: Равенката (2) е *асимптотски стабилна* ако и само ако сите корени на соодветните карактеристични равенки имаат негативен реален дел.

Доказ: За коренот $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in R$ на карактеристичната равенка и одговара дел од решение $y = \varphi(x)$ од облик

$$\varphi(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \dots\dots\dots(5)$$

каде $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми од x .

Меѓутоа, од условот $\alpha < 0$ следува $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$. Бидејќи општото решение на равенката (2) може да се изрази како конечна линеарна комбинација од облик на равенката (5), може да се заклучи дека:

Ако сите корени на карактеристичната равенка имаат негативни реални делови, тогаш за општото решение y важи $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ т.е. равенката (2) е асимптотски стабилна.

Обратно, ако претпоставиме дека равенката (2) е асимптотски стабилна и барем еден корен на карактеристичната равенка има ненегативен реален дел, тогаш се добива контрадикција.

Пример 4.1: Равенката $y'' + y' + ay = 0$, $a \in R$ е: стабилна ако $a \geq 0$, асимптотски стабилна ако $a > 0$, нестабилна ако $a < 0$.

Навистина, соодветната карактеристичната равенка $\lambda^2 + \lambda + a = 0$ има решенија $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4a}$; $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4a}$, па: ако $a \geq 0$, тогаш двете решенија имаат непозитивен реален дел; ако $a > 0$, тогаш двете решенија имаат негативен реален дел; ако $a < 0$, тогаш $\frac{1}{2}\sqrt{1-4a} > \frac{1}{2}$, од што произлегува дека првото решение е позитивно.

Пример 4.2: Диференцијалната равенка $y''' - 9y' + 8y = 0$ не е стабилна, бидејќи соодветната карактеристична равенка $\lambda^3 - 9\lambda + 8 = 0$ има позитивен корен $\lambda = 1$.

Заклучок: Испитувањето на стабилноста на линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти се сведува на испитување на знакот на реалните делови на коренот на соодветната карактеристична равенка.

Од претходно изложеното може да се увиди дека стабилноста на решението на **линеарна диференцијална равенка** со константни коефициенти се утврдува преку испитување на соодветниот карактеристичен полином.

Забелешка 4.1: Во врска со погоре докажаната теорема ние доаѓаме до следната алгебарска задача (наречена проблем на Раус-Гурвиц). Треба да се дознае дали сите корени на даден полином се во левата полурамнина. Тој проблем се решава со конечен број аритметички операции над коефициентите од полиномот. Соодветните алгоритми се опишани во курсевите по алгебра (критериум на Гурвиц, метод на Штурм) и комплексната анализа (принцип на аргумент, Метод на Вишнеградски, Најквист и Михаилов).

Непозитивноста на реалните делови на корените на карактеристичниот полином може да се одреди и без да се знаат корените, со помош на следнава теорема.

Теорема 4.3 (Hurwitz): Сите корени на карактеристичниот полином

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, (a_0 > 0)$$

имаат непозитивни реални делови ако и само ако сите главни минори на матрицата

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & 0 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}$$

се позитивни.

Секоја линеарна диференцијална равенка од вид

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_n x, \quad x=x(t),$$

може да се трансформира со $x=x_1$ во линеарен систем од вид $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = a_n x_1 + a_{n-1} x_2 + \dots + a_1 x_{n-1}$, или во матричен вид

$$x' = Ax, \quad \text{каде } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}.$$

Исто така и секој линеарен систем под одредени услови може да се трансформира во една линеарна диференцијална равенка во однос на една од непознатите функции на системот.

Дефиниција 4.2: Нека е даден линеарен систем

$$\dot{x} = Ax \dots \dots \dots (6)$$

кој има рамнотежна точка $x=0$. Рамнотежната положба на системот е **стабилна** ако секое решение $\varphi(t)$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ е ограничено за $t > 0$ т.е. $\varphi_i(t)$ се ограничени функции. Рамнотежната положба на системот е **асимптотски стабилна** ако за секое нејзино решение важи $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = 0$, $i=1, \dots, n$.

Теорема 4.4: Рамнотежната положба на системот (6) е стабилна ако и само ако сите сопствени вредности на операторот A имаат непозитивни реални делови и е асимптотски стабилна ако и само ако сите сопствени вредности имаат негативни реални делови.

Оваа теорема се докажува на ист принцип како доказот на стабилноста кај една линеарна диференцијална равенка од n -ти ред со константни кофициенти. Во третата глава беше покажано дека решението $\varphi(t)$ со почетна положба $x_0 = \varphi(0)$ е дадено со формулата $\varphi(t) = e^{At} x_0$ како линеарна комбинација од квазиполиноми. Притоа,

$$\varphi_i(t) = \sum_l e^{\lambda_l t} p_{il}(t) + \sum_l e^{\alpha_l t} [q_{il}(t) \cos \omega_l t + r_{il}(t) \sin \omega_l t]$$

каде $\lambda_l, \alpha_l \pm i\omega_l$ се сопствени вредности на карактеристичната равенка $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ и $p_{il}(t), q_{il}(t), r_{il}(t), i=1, n$, се полиноми.

Стабилност на линеарни автономни системи по Ляпунов. Поим за дефинитни форми

Во 1892 година настапува најзначајниот развој на теоријата на стабилност, со објавувањето на докторската дисертација на Александар Михајлович **Ляпунов** со наслов ***Опишта задача за стабилност на движење***. Терминот стабилност на движење се користи заради механичкото значење на стабилноста. Оваа дисертација е од клучно значење во теоријата на стабилност. Во неа се дадени строги методи за решавање на проблемот за стабилност на решението на диференцијалните равенки. Исто така, дадена е и прецизна дефиниција на стабилност која може да подлежи на математички испитувања. Од овој момент па натаму, теоријата на стабилност се развива во различни правци.

Во современата математика големо внимание се посветува на изучувањето на: стабилност на автономни динамички системи, стабилност при константни нарушувања, стабилност при големи почетни нарушувања, стабилност на

периодични решенија, стабилност на конечни временски интервали, стабилност на орбити (орбитална стабилност), стабилност при дејствување на случајни сили, итн.

Сите овие видови стабилност се применуваат во многу области од науката, а особено во области од физиката, хемијата, биологијата, астрономијата, балистиката, теоријата на регулација и така натаму.

Постојат повеќе дефиниции за стабилност на решението на диференцијалните равенки, како и на системите диференцијални равенки. Сите тие произлегле заради специфичните потреби на авторите, од математички и практични причини. Меѓу сите дефиниции централното место го заземаат дефинициите воведени од Ляпунов.

Теоријата на стабилност игра централна улога во теоријата на динамичките системи. Постојат различни видови проблеми на стабилност кои се јавуваат во изучувањето на динамички системи. Надворешните нарушувања (влијанија), како што се бучава, ветер, компонентни грешки и слично, се секогаш присутни во реалниот систем и ја нарушуваат рамнотежата на системот.

Ова поглавје е посветено на стабилноста на рамнотежните точки во смисла на Ляпунов, руски математичар и инженер, кој ги поставил основите на теоријата, која сега го носи неговото име. Напредокот во теоријата на стабилноста се должи токму на Ляпунов (1892 год). Тој не само што вовел основни дефиниции за стабилност, кои се во употреба и денес, но, исто така, докажал многу од основните теореми. Денес темелите на оваа теорија се добро поставени и истата е неопходен инструмент во анализа и синтеза на нелинеарни системи.

Дефиниција 4.3: Реалната функција од n реални променливи

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

се вика **квадратна форма**.

Ако $A = [a_{ij}]$ тогаш $f(x) = (x, Ax) = x^T (Ax)$.

Дефиниција 4.4: Нека е дадена квадратната форма $f(x) = (x, Ax)$, каде A е симетрична матрица. Квадратната форма е:

- позитивно дефинитна** ако $f(x) > 0, \forall x \neq 0$,
- негативно дефинитна** ако $f(x) < 0, \forall x \neq 0$,
- позитивно семидефинитна** ако $f(x) \geq 0, \forall x$,
- негативно семидефинитна** ако $f(x) \leq 0, \forall x$,
- недефинитна** ако не припаѓа на претходните случаи.

Соодветната матрица A се нарекува со ист термин (дефинитност).

Теорема 4.5 (Силвестер): Симетричната матрица $A = [a_{ij}]$ е позитивно дефинитна ако сите нејзини главни минори се позитивни.

Ако матрицата A не е симетрична тогаш се зема матрицата $B=(1/2)(A+A^T)$ која е симетрична при што важи $f(x)=(x, Ax)=(x, Bx)$.

Да го разгледаме системот $x'=Ax$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$. Системот има рамнотежна положба во координатниот почеток. Едно решение со почетен услов $\varphi(t_0)=0$ е $\varphi=0$. Нас нè интересира однесувањето на решенија со блиски почетни услови.

Дефиниција 4.5: Рамнотежната положба $x=0$ на равенката (6) се вика **стабилна (по Ляпунов)** ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (зависи само од ε и не зависи од t) така што $\forall x_0$ за кое важи $\|x_0\| < \delta$, решението φ на равенката (6) со почетен услов $\varphi(0) = x_0$ може да се продолжи на целата полуоска $t > 0$ и при тоа го задоволува неравенството $\|\varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0$.

Пример 4.3: Да се испита стабилноста на рамнотежната положба на системите:

$$\text{а) } x_1' = x_2, x_2' = -x_1 \quad \text{б) } x_1' = x_1, x_2' = -x_2$$

Решение: а) Корените на карактеристичната равенка, $\lambda_{1,2} = \pm i$, имаат реален дел нула, па според теорема 4.4 рамнотежната положба (во случајот координатниот почеток) ќе биде стабилна.

б) Корени на карактеристичната равенка се $\lambda_{1,2} = \pm 1$, па бидејќи постои реална позитивна сопствена вредност, рамнотежната положба (координатниот почеток) ќе биде нестабилна.

Дефиниција 4.6: Рамнотежната положба $x=0$ на равенката (6) се нарекува **асимптотски стабилна** ако е стабилна (по Ляпунов) и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ за секое решение φ со почетни услови $\varphi(0)$ кои лежат во доволно мала околина на нулата.

Во третата глава беше дефинирана функција на Ляпунов како специјална квадратна форма за линеарни системи.

Нека дефинираме квадратна форма $W(x) = x^T P x$, каде P е реална симетрична позитивно дефинитна матрица. Тогаш изводот вдолж траекториите на линеарниот систем (6) е $W'(x) = x^T P x' + x'^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$, каде Q е симетрична матрица дефинирана со $PA + A^T P = -Q$.

Теорема 4.6: Ако сите сопствени вредности на матрицата A кај системот (6) имаат негативни реални делови тогаш постои реална симетрична позитивно дефинитна матрица P таква што соодветната квадратна форма $W(x) = x^T P x$ е позитивно дефинитна, а изводот на квадратната форма е негативно дефинитна квадратна форма.

Навистина ако сите сопствени вредности на матрицата A имаат негативни реални делови тогаш за дадена позитивно дефинитна матрица Q постои позитивно дефинитна матрица P за која важи $PA + A^T P = -Q$ и со која е дефинирана

квадратната форма $W(x)$. Во тој случај изводот $W'(x)$ е негативна квадратна форма т.е. $W'(x) < 0$.

Последица 4.1: Стабилноста на рамнотежната положба може да се испита и со помош на квадратна форма т.е. нејзиниот извод. Ако $W'(x) < 0$ тогаш положбата е стабилна.

Дефиниција 4.7: Множеството дефинирано со равенката $W(x) = C$ се вика **ниво површини на Ляпунов**.

Стабилност на нелинеарни автономни системи. Теорема на Ляпунов

Проблемот со стабилност на рамнотежна положба на нелинеарен систем се разрешува исто како и за линеарен систем ако последниот нема сопствени вредности на имагинарната оска.

Секој нелинеарен систем $x' = v(x)$, каде $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекинато диференцијабилно пресликување од домен $U \subseteq \mathbb{R}^n$ во \mathbb{R}^n , може да се апроксимира во мала околина на почетокот со неговата линеаризација $x' = Ax$, каде $A = \nabla v(x)|_{x=0}$.

Следната теорема е позната како **индиректен метод на Ляпунов** и овозможува да се одреди стабилноста на рамнотежна точка за нелинеарниот систем, преку испитување на стабилноста на рамнотежната точка на линеарниот систем.

Теорема 4.7: Нека $x = 0$ е рамнотежна точка за нелинеарниот систем $x' = v(x)$ каде $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекинато диференцијабилно пресликување и U е околина на почетокот. Нека $A = \nabla v(x)|_{x=0}$. Тогаш, почетокот е **асимптотски стабилен**, ако $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ кај сите сопствени вредности на A , почетокот е **нестабилан**, ако $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ за еден или повеќе сопствени вредности на A .

Оваа теорема дава едноставна постапка за одредување на стабилноста на рамнотежната точка во почетокот. Се пресметува Јакоби-евата матрица $A = \nabla v(x)|_{x=0}$ и се тестираат најзините сопствени вредности. При тоа треба да бидат задоволени одредени услови за функцијата $v(x)$.

Пример 4.4: Ќе разгледаме скаларен систем $x' = ax^3$. Со линеаризација на системот околу почетокот $x = 0$ се добива: $A = \nabla v(x)|_{x=0} = 3ax^2|_{x=0} = 0$. Постои една сопствена вредност која се наоѓа на имагинарната оска. Така, со линеаризацијата не може да се одреди стабилноста на почетокот.

Пример 4.5: Равенката на нишалото

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

има рамнотежни точки од облик $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ќе ја испитаме стабилноста на двете рамнотежни точки $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ преку линеаризација. Јакоби-евата матрица за функцијата $v(x) = [v_1(x_1, x_2) \ v_2(x_1, x_2)]^T$, $v_1(x_1, x_2) = x_2$, $v_2(x_1, x_2) = -a \sin x_1 - bx_2$ е дадена

$$\text{со: } \nabla v(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}. \text{ За одредување на стабилноста на}$$

почетокот ќе го пресметаме Јакоби-јанот во $x = 0$: $A = \nabla v(x)|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$.

Сопствените вредности на A се $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$. За сите $a, b > 0$,

сопствените вредности го задоволуваат неравенството $\text{Re } \lambda_i < 0$. Следствено, рамнотежната точка во почетокот е *асимптотски стабилна*. Во отсуство на триење ($b = 0$), двете сопствени вредности се на имагинарната оска. Така, не може да се одреди стабилноста на почетокот преку линеаризација. Во овој случај стабилноста се одредува со помош на Ляпунов-ата функција на енергија. За да ја одредиме стабилноста на рамнотежната точка $(\pi, 0)$, ќе го пресметаме Јакоби-јанот во таа точка. Ова е еквивалентно со воведување на замена на променливите $z_1 = x_1 - \pi$, $z_2 = x_2$ за да ја поместиме рамнотежната точка до почетокот и да пресметаме Јакоби-јан $\nabla v(x)$ во $z = 0$:

$$\tilde{A} = \nabla v(x)|_{x=(\pi, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}.$$

Сопствените вредности на \tilde{A} се $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$. За сите $a > 0$ и $b \geq 0$,

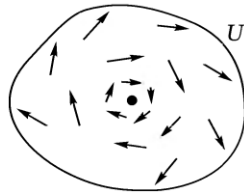
постои една сопствена вредност во отворената десна полурамнина. Така, рамнотежната точка во $(\pi, 0)$ е *нестабилна*.

Да ја разгледаме равенката:

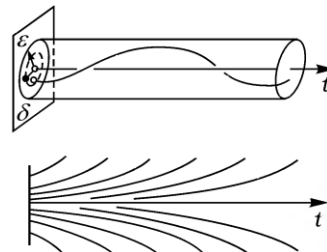
$$x' = v(x) \dots \dots \dots (7)$$

$x \in U \subset \mathbb{R}^n$ каде $v(x)$ е повеќе од два пати диференцијабилно векторско поле во областа U . Ќе претпоставиме дека равенката има рамнотежна положба и избираме координати x_i такви да рамнотежната положба биде во координатниот почеток $v(0) = 0$ (цртеж 4.1). Едно решение со почетен услов $\varphi(t_0) = 0$ е $\varphi = 0$. Нас нè интересира однесувањето на решенија со блиски почетни услови.

Дефиниција 4.8: Рамнотежната положба $x=0$ на равенката (7) се вика **стабилна (по Ляпунов)** ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (зависи само од ε и не зависи од t) така што $\forall x_0$ за кое важи $\|x_0\| < \delta$, решението φ на равенката (7) со почетен услов $\varphi(0) = x_0$ може да се продолжи на целата полуоска $t > 0$ и при тоа го задоволува неравенството $\|\varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t > 0$ (цртеж 4.2).



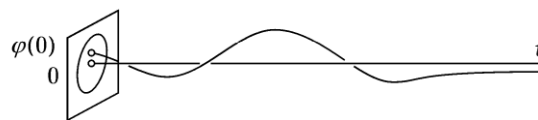
Цртеж 4.1



Цртеж 4.2

Со други зборови стабилноста на рамнотежната положба по Ляпунов е рамномерна конвергенција на интервалот $[0, +\infty]$ (кон константното решение) на решение чиј почетен услов се стреми кон разгледуваната рамнотежна положба. Конвергентноста на вредностите на решението за било кое фиксно t е гарантирана со теоремата за непрекината зависност на решението од почетните услови. Имено важна е рамномерната конвергенција т.е. независноста на δ од t .

Дефиниција 4.9: Рамнотежната положба $x=0$ на равенката (7) се нарекува **асимптотски стабилна** ако е стабилна (по Ляпунов) и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ за секое решение φ со почетни услови $\varphi(0)$ кои лежат во доволно мала околина на нулата (цртеж 4.3).

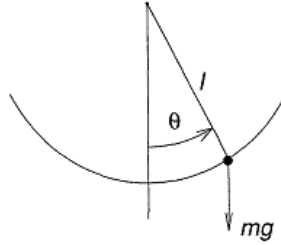


Цртеж 4.3

Асимптотски стабилна рамнотежна положба; интегрална крива

Откако ја дефиниравме стабилноста (по Ляпунов) и асимптотската стабилност кај нелинеарни системи, следна задача е да се најде начин да се одреди стабилноста освен со линеаризација.

Пример 4.6: Грете видови на стабилност можеме да ги илустрираме преку примерот на нишало.



Цртеж 4.4

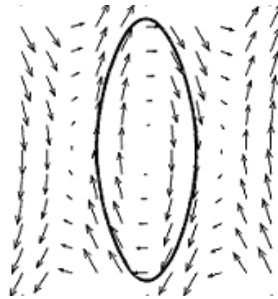
Равенките на состојбата на нишалото дадено на цртеж 4.4 се:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

Рамнотежните точки се наоѓаат од системот

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\ -a \sin x_1 - bx_2 &= 0.\end{aligned}$$

Рамнотежните точки се наоѓаат во $(n\pi, 0)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Ние ќе ги разгледаме двете рамнотежни точки $(0, 0)$, $(\pi, 0)$. Ако го занемариме триењето, т.е. $b=0$, се добива дека траекториите во околина на првата рамнотежна точка се блиски орбити.



Цртеж 4.5

Векторско поле на равенката на нишало без триење

Затоа, започнувајќи доволно близу до рамнотежната точка, траекториите остануваат во определен круг со центар во рамнотежната точка. Рамнотежната точка не е асимптотски стабилна бидејќи траекториите не се стремат кон рамнотежната точка. Тие остануваат во своите блиски орбити. Ако се земе предвид и триењето, т.е. $b > 0$, тогаш рамнотежната точка претставува **стабилен фокус**. Траекториите кои започнуваат блиску до рамнотежната точка, се стремат кон неа кога $t \rightarrow \infty$. Втората рамнотежна точка е **седло**. Јасно, за секое $\varepsilon > 0$, секогаш постои траекторија која ќе го напушти кругот со радиус ε и центар во x_e дури и кога $x(0)$ е произволно блиску до рамнотежната точка x_e .

Да ја дефинираме енергијата на нишалото $E(x)$ како сума од неговата потенцијална и кинетичка енергија, земајќи предвид дека потенцијалната енергија $E(0) = 0$:

$$E(x) = \int_0^{x_1} a \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

Ако се занемари триењето ($b = 0$), системот е конзервативен; нема губење на енергија. Така, $E = \text{const.}$ за време на движењето на системот, или со други зборови, $\frac{dE}{dt} = 0$ вдоль траекториите на системот. Бидејќи $E(x) = c$ формира затворена контура околу $x = 0$ за мало c , се доаѓа до ист заклучок дека $x = 0$ е стабилна рамнотежна точка.

Ако се земе во предвид триењето ($b > 0$), доаѓа до губење на енергија за време на движењето на системот, т.е. $\frac{dE}{dt} \leq 0$ вдоль траекториите на системот. Заради триењето, E не може да остане константна додека системот е во движење. Така, таа се намалува се додека не достигне нула, односно траекторијата се стреми кон $x = 0$ кога $t \rightarrow \infty$. Пресметувајќи го изводот на E вдоль траекториите на системот, може да се одреди стабилноста на рамнотежната точка.

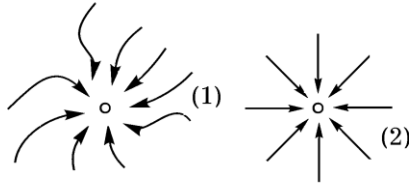
На цртеж 4.6 е прикажана разликата меѓу стабилноста во смисла на Ляпунџ и асимптотската стабилност.



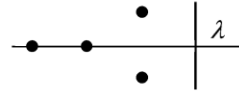
Цртеж 4.6
Фазни портрети за стабилни и нестабилни рамнотежни точки

Да ја разгледаме сега линеаризираната равенка $x' = Ax$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ за равенката (7), каде $v(x) = v_1 + v_2$, $v_1(x) = Ax$.

Теорема 4.8 (цртеж 4.7): Нека е дадена равенката (7) и нека $v(x)=v_1+v_2$, каде $v_1(x)=Ax$. Ако $v_2(x)=O(\|x\|^2)$ и ако сите сопствени вредности λ на операторот A лежат во левата полурамнина, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, тогаш рамнотежната положба $x=0$ на равенката (7) е асимптотски стабилна.

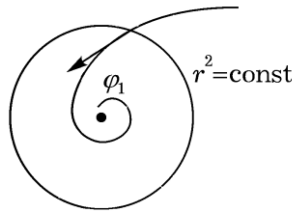


Цртеж 4.7
Фазни криви на равенката (7)



Цртеж 4.8
Сопствени вредности на операторот A

Според теоремата за функција на Ляпунов (од трета глава) постои функција на Ляпунов т.е. позитивно дефинитна квадратна форма r^2 чиј извод во правец на линеарното поле $v_1 = Ax$ е негативно дефинитен: $L_{v_1} r^2 \leq -2\gamma r^2$ каде γ е позитивна константа (цртеж 4.9). (Кај теоремата за конструкција, во трета глава, за $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ беше $L_{Ax} r^2 > 0$. Овде $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ па затоа $L_{v_1} r^2 \leq -2\gamma r^2$ т.е. $L_{v_1} r^2$ е негативно дефинитна квадратна форма).



Цртеж 4.9
Ниво површина на функцијата на Ляпунов

Лема 4.1: Во доволно мала околина на точката $x=0$ изводната функција од функцијата на Ляпунов во насока на нелинеарното поле v го задоволува неравенството

$$L_v r^2 \leq -\gamma r^2, \quad \gamma > 0$$

Доказ: Навистина $L_v r^2 = L_{v_1} r^2 + L_{v_2} r^2$. Ќе покажеме дека за мали вредности на r вториот собирок е доста помал од првиот: $L_{v_2} r^2 = O(r^3) \dots (*)$. Всушност за било кое поле u и било која функција f важи $L_u f = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i$. Во нашиот случај ($u = v_2$, $f=r^2$) $u_i=O(r^2)$ $\nabla f = O(r)$ од каде произлегува неравенството (*). Според тоа постои $C>0$, $\sigma>0$ такви што за секое x : $\|x\|<\sigma$ е задоволено неравенството

$|L_v r^2| \leq C |r^2(x)|^{3/2}$. Десната страна не е поголема од γr^2 , $\gamma > 0$ при доволно мали $\|x\|$, така што во некоја околина на точката $x=0$, $L_v r^2 \leq -2\gamma r^2 + \gamma r^2 = -\gamma r^2$. Лемата е докажана.

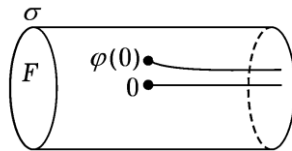
Нека φ е решение на равенката (7) различно од нултото со почетен услов $\varphi(0)$ во доволно мала околина на точката $x=0$. Дефинираме функција од време $\rho(t)$ со равенката $\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t))$, $t \geq 0$. Според теоремата за единственост на решението $r^2(\varphi(t)) > 0$, $t \geq 0$. Бидејќи ρ е добро дефинирана и диференцијабилна, во согласност со неравенството $L_v r^2 \leq -\gamma r^2$, $\gamma < 0$, се добива:

$$\rho' = \frac{1}{r^2 \circ \varphi} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \circ \varphi) = \frac{1}{r^2(\varphi(t))} \cdot \frac{d}{dt}(r^2(\varphi(t))) = \frac{L_v r^2}{r^2} \leq -\gamma$$

Од неравенството $\rho'(t) \leq -\gamma$, $t \geq 0$ следува дека функцијата $\rho(t)$ монотонно опаѓа. Од неравенството се добива $\rho(t) \leq \rho(0) - \gamma t$ и со замена на формулата за ρ се добива: $r^2(\varphi(t)) \leq r^2(\varphi(0))e^{-\gamma t}$. Од тука произлегува дека $r^2(\varphi(t))$ монотонно опаѓа и се стреми кон нула кога $t \rightarrow \infty$. Во согласност со неравенството $\alpha \|x\| \leq r^2(x) \leq \beta \|x\|$ за $x=\varphi(t)$ се добива $\varphi(t) \rightarrow 0$ кога $t \rightarrow \infty$, што и требаше да се докаже.

Уште треба да се докаже дека решението φ може да се продолжи напред неограничено. Да разгледаме такво $\sigma > 0$, така што за $\|x\| < \sigma$ е задоволено неравенството: $L_v r^2 \leq -\gamma r^2$. Ќе го разгледаме компактниот во проширениот фазен простор $F = \{(x, t): r^2 x \leq \sigma, |t| \leq T\}$ $-2\gamma r^2$ (цртеж 4.10).

Да го разгледаме решението со почетен услов $\varphi(0)$, каде $r^2(\varphi(0)) < \sigma$. Според теоремата за продолжување φ може да се продолжи на напред до границите на цилиндарот F . Но бидејќи точката $(t, \varphi(t))$ припаѓа на F , изводот од функцијата $r^2(\varphi(t))$ е негативен. Според тоа решението не може да излезе низ бочната површина на цилиндарот F (каде $r^2 = \sigma^2$) и значи продолжува внатре до крајот за $t=T$. Бидејќи T е произволно (и не зависи од σ), решението φ може да се продолжи нанапред неограничено при што $r^2(\varphi(t)) < \sigma^2$ и неравенството $L_v r^2 \leq -\gamma r^2$ важи за сите $t \geq 0$.



Цртеж 4.10

Неограничено продолжување на решението на напред

Забелешка 4.2. Ние докажавме уште повеќе дека имаме и асимптотска стабилност на рамнотежната положба. Од неравенството $\rho(t) = \rho(0) - \gamma t$, $r^2(\varphi(t)) \leq r^2(\varphi(0))e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ е очигледно дека конвергенцијата $\varphi(t) \rightarrow 0$ е рамномерна (во однос на почетните услови x_0 , доволно блиски до 0). Освен тоа неравенството укажува на брзината на конвергенција (експоненцијална).

Во суштина теоремата утврдува дека рамномерната експоненцијална конвергенција на решението на линеарната равенка $x' = Ax$ кон нула не се нарушува при нелинеарно влијание $v_2(x) = O(\|x\|^2)$ на десната страна на равенката. Аналогно тврдење е точно и за различни влијанија од поопшта природа. На пример, може да се разгледува и неавтономното влијание $v_2(x, t)$ за кое $\|v_2(x, t)\| \leq \phi(\|x\|)$ каде $\phi(\|x\|) = o(\|x\|)$, кога $x \rightarrow 0$.

Во 1892 год. Ляпунџов докажал дека и други функции би можеле да се користат, наместо енергијата, за одредување на стабилноста на рамнотежната точка.

Нека е даден системот (7) каде $v(x)$ е векторското поле дадено во матричен запис $v(x) = [v_1(x) \ v_2(x) \ \dots \ v_n(x)]^T$, $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in U$. Нека $W(x)$ е реална функција од n реални променливи, диференцијабилна на множеството U . Градиент на оваа функција е даден со формулата $\text{grad}W = (\partial W / \partial x_1) \ (\partial W / \partial x_2) \ \dots \ (\partial W / \partial x_n)$.

Дефиниција 4.9: Извод од функцијата $W(x)$ по правците на векторското поле $v(x)$ (вдолж траекториите на системот (7)) е даден со скаларниот производ:

$$W'(x) = (\text{grad}W, v(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \cdot v_i(x).$$

Изводот вдолж траекториите на системот зависи само од равенките на системот т.е. не зависи од решенијата на системот.

При тоа, $W'_t(x) = \frac{d}{dt} W(x) = \frac{dW(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dW}{dx} \cdot v(x) = (\text{grad}W, v(x))$ (извод од сложена функција).

Така, $W'(x)$ ќе биде различен за различни системи. Ако $\varphi(t)$ е решение на системот (7) кое започнува во почетната состојба x во временскиот момент $t=0$, тогаш

$$W'(x) = \left. \frac{d}{dt} W(\varphi(t)) \right|_{t=0}.$$

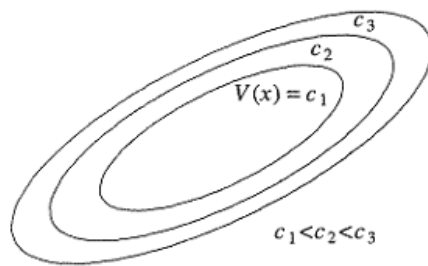
Заради тоа, ако $W'(x)$ е негативен, W ќе се намалува вдолж решението на (7).

Теорема 4.9: Нека е даден системот (7) и нека $x=0 \in U$ е негова рамнотежна точка. Нека постои функција $W(x)$, непрекината и диференцијабилна на U со услов $W(0)=0$ и $W(x)>0$ на $U=\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (позитивно дефинитна). Ако $W'(x) \leq 0$, $\forall x \in U$ (негативно семидефинитна) тогаш $x=0$ е стабилна по Ляпунџов. Ако $W'(x) < 0$, $\forall x \in U$,

$x \neq 0$ (негативно дефинитна) тогаш $x=0$ е асимптотски стабилна. Функцијата $W(x)$ се нарекува функција на Ляпунџ.

Пример 4.7: Ќе разгледаме скаларен систем $x' = ax^3$. Со линеаризација на системот околу почетокот $x=0$ се добива: $A = \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 3ax^2 \Big|_{x=0} = 0$. Постои една сопствена вредност која се наоѓа на имагинарната оска. Така, со линеаризацијата не може да се одреди стабилноста на почетокот. Стабилноста зависи од параметарот a . Ако $a < 0$, почетокот е асимптотски стабилен како што може да се заклучи од обликот на Ляпунџ функцијата $W(x)=x^4$ чиј извод е $W'(x)=(4x^3)(ax^3)=4ax^6 < 0$ за $x \neq 0$. Ако $a = 0$, системот е линеарен и почетокот е стабилен. Ако $a > 0$, почетокот е нестабилен и Ляпунџ функцијата има извод $W'(x)=4ax^6 > 0$ за $x \neq 0$.

Површината $W(x)=c$, за некое $c > 0$ се вика **површина на Ляпунџ**. На цртеж 4.11 се прикажани површини на Ляпунџ, со што теоремата станува интуитивно појасна.



Цртеж 4.11
Ляпунџ -и површини на функција Ляпунџ

На сликата се прикажани површини на Ляпунџ за различни вредности на c , кои се зголемуваат. Условот $W'(x) \leq 0$ имплицира дека кога траекторијата минува низ површината на Ляпунџ $W(x)=c$, таа се движи внатре во множеството $\Omega_c = \{x \in R^n \mid W(x) \leq c\}$ и никогаш не може да излезе од тоа множество. Кога $W'(x) < 0$, траекторијата се движи од една површина на Ляпунџ кон внатрешната површина на Ляпунџ со помало c . Со зголемување на c , површината на Ляпунџ $W(x)=c$ се собира кон почетокот, покажувајќи дека траекторијата се приближува кон почетокот со зголемувањето на времето. Ако знаеме само дека $W'(x) \leq 0$, не можеме да бидеме сигурни дека траекторијата се приближува кон почетокот, но можеме да заклучиме дека почетокот е стабилен, бидејќи траекторијата може да биде содржана во внатрешноста на секоја топка B_ε под услов почетната состојба $x(0)$ да лежи во површина на Ляпунџ која се наоѓа во топката.

Пример 4.8: Да ја разгледаме равенката на нишало (без триење):

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -a \sin x_1\end{aligned}$$

каде $v(x) = [x_2 \ -a \sin x_1]^T$ и $(0,0)$ е рамнотежна точка .

Кандидат за функција на Ляпунов е функцијата на енергија $W(x_1, x_2) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$. Јасно, $W(0,0)=0$ и $W(x)$ е позитивно дефинитна на доменот $-2\pi < x_1 < 2\pi$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. При тоа $\text{grad}W = [a \sin x_1 \ x_2]$. Изводот на $W(x)$ вдоль траекториите на системот е даден со:

$$W'(x) = (\text{grad}W, v(x)) = ax_1' \sin x_1 + x_2 x_2' = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0$$

Значи, условите $W(0,0)=0$ и $W(x)>0$ (позитивно дефинитна) на доменот $-2\pi < x_1 < 2\pi$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ и $W'(x) \leq 0$ (негативно семидефинитна) од претходната теорема се исполнети, па почетокот е стабилен. Бидејќи $W'(x)=0$, може да заклучиме дека почетокот не е асимптотски стабилен; траекториите кои започнуваат на површината на Ляпунов $W(x)=c$ остануваат на истата површина цело време понатаму.

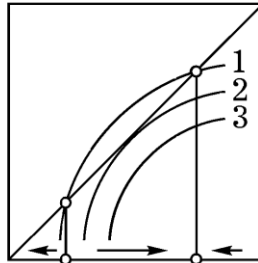
Модел на Лотка-Волтера. Скалило на Ламере

Нека повторно го разгледаме моделот на Лотка-Волтера и скалилото на Ламере проучени во прва глава како и особината системот да има граничен циклус скоро целосно стабилен во однос на малите промени на системот равенки. Поточно нека претпоставиме дека на циклусот соодветствува неподвижна точка $A=F(A)$ на функцијата на сукцесивност F и дека $F'(A) \neq 0$. Во тој случај циклусот се нарекува **регуларен**. Ако системот зададен со векторско поле v_0 има регуларен граничен циклус кој минува низ A_0 , тогаш секој близок систем (зададен со полето v_ε , ε - доволно мало) има близок циклус $(v_\varepsilon, A_\varepsilon)$ (кој минува низ блиска до A_0 точка $A_{(\varepsilon)}$). За доказ може да се примени теоремата за имплицитна функција кај равенката $F(A, \varepsilon)=A$, $A(0)=A_0$. Според тоа излезот од присуството во системот на автоосцилации, кои се опишуваат со регуларен граничен циклус е груб: во секој близок систем ќе бидат блиски автоосцилации.

Да забележиме дека дегенеративните гранични циклуси можат да исчезнат при мали поместувања на системот. Сепак тие можат да се појават како неотстранливи со мали начини на поместување во тој случај кога се разгледува не поединечен систем туку семејство системи кои зависат од параметар. Во тој случај при одделни вредности на параметарот можат да се соединуваат меѓу себе различни циклуси при што аналогно спојување може да има место при некоја блиска вредност на параметарот и во било кое блиско семејство. Во моментот на спојување на два регуларни циклуси се појавува дегенеративниот циклус. При тоа општо речено, од двата соединувачки циклуси едниот е стабилен а другиот нестабилен. Родениот циклус, кој се појавува при соединување на два регуларни

циклуси, претставува интерес бидејќи тие се среќаваат на границите на областа на егзистенција на осцилаторниот режим во просторот на параметри.

На пример, на цртеж 4.12 е исцртан дијаграмот на Ламере при три доволно блиски вредности на параметарот (кривите 1,2 и 3).

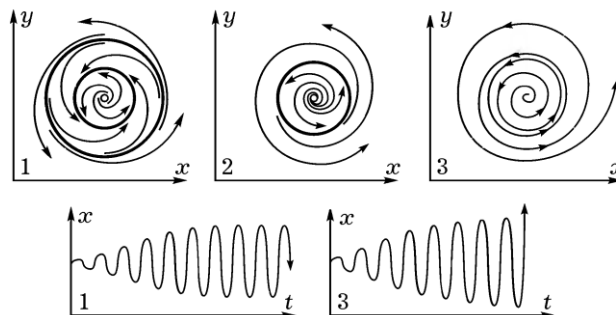


Цртеж 4.12
Дијаграм на Ламере

Дијаграмот 1 ја пресекува бисектрисата во две точки; во тој случај во системот имаме два гранични циклуси, стабилен во нестабилниот (цртеж 4.13).

Рамнотежната положба е нестабилна, целата област во внатрешноста на нестабилниот циклус се јавува како област на привлекување (базен) на стабилниот циклус: при почетни услови од таа област (исклучувајќи ја само рамнотежната положба) во системот се востановува автоосцилација, отсликана со стабилниот циклус.

Кривата 2 соодветствува на критичната вредност на параметарот, стабилниот циклус се спојува со нестабилниот и станува дегенеративен. Фазните криви кои почнуваат од областа ограничена со циклусот се стремат кон циклусот при растење на времето. Сепак востановениот при тоа осцилаторен режим е нестабилен: доволно мала случајна промена може да ја исфрли фазната точка како гранична на циклусот.



Цртеж 4.13
Реструктурирање на фазниот простор и однесување на решението

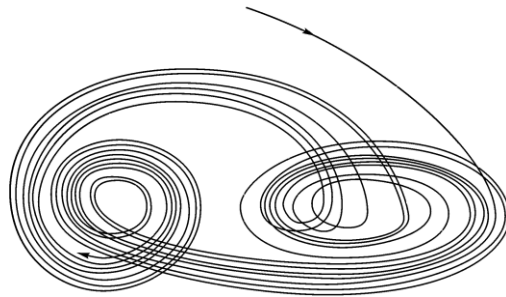
При понатамошна промена на параметарот (крива 3) циклусот потполно исчезнува. На тој начин, спојувањето на циклусите доведува до скоковита промена на однесувањето на системот: стабилниот автоосцилаторен режим со конечна област на привлекување неочекувано исчезнува. Движењето со почетни услови од базенот на исчезнувачкиот циклус влегува после неговото исчезнување во други области на фазниот простор (цртеж 4.13). Во нашиот пример после преминот на параметарот низ критичната вредност кај популациите на ловци и жртви, при било каква мала промена на почетните услови од рамнотежните, доаѓа до неограничено пораснување на осцилациите и според тоа до истребување. Реструктурирањето на квалитативната слика на движењето при промена на параметрите се изучува во теоријата на бифуркации, а примената на теоријата на бифуркации кон изучување на скоковитите реакции на механичките, физичките, хемиските, биолошките, економските и другите системи при флукутирачка промена на надворешните услови, добила во последно време назив теорија на катастрофи (хаос). Од цртеж 4.12 е очигледно дека кога вредноста на параметарот е различна од критичната вредност за мала величина Δ , растојанието меѓу стабилниот и нестабилниот циклус е од ред $\sqrt{\Delta}$. Според тоа брзината на зближувањето на циклусите при промена на параметарот брзо ќе расте по мерка на приближувањето на параметарот кон критичната вредност: во самиот момент на катастрофа двата циклуса се движат еден кон друг со бесконечна брзина. Тоа објаснува зошто е така тешко да се предвиди невременската катастрофа при губење на стабилноста на системот, кога се уште може се забележливи нејзините знаци.

Забелешка 4.3: Може да се покаже дека раѓањето и смртта (појавувањето и исчезнувањето) на циклус од рамнотежна положба, како и раѓањето и смртта на пар циклуси е типична појава која се среќава при промена на параметрите кај општи еднопараметарски семејства диференцијални равенки.

Рамнотежните гранични циклуси кои ги опишуваат констатираните периодични осцилации на системите, се наоѓаат во стационарни надворешни услови. Осцилациите кои се опишани со стабилни циклуси се нарекуваат автоосцилации за разлика од принудените осцилации предизвикани со периодични надворешни влијанија (содејства) и од осцилации од типот на слободни осцилации кај нишалото. Појавувањето на автоосцилации само по себе е доволно прекрасно но тие се среќаваат на пример кај такви системи како што се саат, парна машина, електрично звонче, срце, радиопредавател, промени кај звезди од типот на цефенд, чија што работа кај секој од нив се опишува со граничен циклус во соодветен фазен простор.

Сепак не може да се каже дека баш сите осцилаторни процеси се опишуваат со гранични циклуси, во повеќедимензионален фазен простор е возможно далеку посложено однесување на фазните криви. Како примери можат да послужат жироскопот, движењето на планетите и нивните сателити и нивната ротација околу својата оска; непериодичноста на тие движења е одговорна за сложеноста на календарот и тешкотијата да се предвиди (претходно пресмета) плимата, а исто

така и движењето на наелектризираните честици во магнетно поле (одговорно за појавата на поларната светлина). Во системите со повеќедимензионални фазни простори фазните криви можат наместо кон циклус да се приближуваат и кон множество во кое сите блиски траектории брзо можат да се оддалечуваат една од друга (цртеж 4.14). Таквите привлекувачки множества добиле во последно време назив **атрактори**; тие се поврзани со појави од типот на турбуленции и се одговорни, на пример, за неможноста на долгорочна прогноза за невреме.



Цртеж 4.14
Атрактор

5. БИФУРКАЦИИ. МОДЕЛИ НА ЛОРЕНЦ

Вовед

Раѓањето (почетокот) на теоријата на бифуркации би требало да се најде во втората половина на 18 век кога од Ојлер била решена неговата важна задача за стабилноста на греда врз која делува вертикален терет кој е ставен врз неа од горе. Во 20 век веќе било познато дека при разгранувањето на можни форми на стационарни (или периодички) решенија, промена на параметри кои ги карактеризираат надворешните влијанија, се клучот за разбирање на ред важни физички појави. Образувањето (создавањето) на бранови на површината на водата, јајчестата структура на конвекции (бескрајна трака), торнада, урагани во атмосферата, и многу други природни појави имаат една иста причина, а имено промена на карактерот на стабилноста на воспоставениот режим при преминување на некои параметри низ нивни критични (бифуркациони) вредности.

За разбирање на подобните факти и нивната улога во науката за природата е заслужен пред сè Поанкаре. Неговото проучување во теоријата на гранење придонело кон оформување на теоријата на особеностите (сингуларитетите) во самостојна дисциплина. Работата на Љапунов и Шмит со чии имиња е врзан познатиот метод на Љапунов-Шмит, суштински ја открива можноста за ефективна анализа на широка класа операторски равенки. Во последните две децении проучувањето на особеностите и карактерот на разгранување на решенијата на операторските равенки брзо се интензивираат. За тоа имало многу причини.

Има многу работи (монографии) посветени на задачи на бифуркации. Зборот бифуркација или *Abzweigung*, е воведен од К. Јакоби (1834) кај проучувањето на бифуркации на сфероидални фигури на рамнотежа (елипсоиди на Маклорен) самогравитациони вртливи тела. Францускиот збор *bifurcation* е воведен од Поанкаре (1885).

Основни поими

Нека претпоставиме дека ја проучуваме појавата на резонанца кај Хамилтонов систем. Користејќи ја теоријата на тој систем, ние обично доволно лесно ја наоѓаме главната резонанса, неговата прва хармоника и ја гледаме во природата соодветно на резултатите што ние сме ги добиле врз основа на теоретската анализа. Но подетални ефекти, сврзани со резонансите од повисок ред, со помош на експерименти ние често не можеме да ги откриеме. Појавата се заташкува поради присутна дисипација (растување) или поради дејство на случајни влијанија кои во принцип не треба да се исклучат. Со соодветната појава ние ќе се судриме тогаш кога ќе почнеме да ги користиме нумеричките методи. Тој “шум” кој го внесува електронската машина не може да се компензира со усовршување на резонантните апроксимации. Овде требаат други начини.

Ете зошто во применетите проучувања ние засега ги користиме во главно методите од типот на Љапунов-Шмит и нивното понатамошно развивање останува доста важно.

Втората причина за интересот кон теоријата на бифуркации е сврзана со наглото проширување на фронтот на изучување на различни стационарни (но не рамнотежни во термодинамичен смисол) структури. Со појавата на трудот на Пригошки од теоријата на диссипативни структури во хемиската кинетика и нерамнотежна термодинамика, трудот на Егена (за проучување на еволуцијата на биолошкиот макромолекул) и цела низа други проучувања од тие области ја покажало длабоката врска меѓу појавата на (диссипативни) структури и теоријата на разгранување на решенијата на соодветните операторски равенки.

Денес станала разбирлива таа улога која ја игра механизмот на разгранување во еволуциските процеси. Механизмите на еволуцијата, основани врз внатрешен избор, добро се изучени не само со биолошки методи туку и со помош на анализа на соодветни математички модели. Паралелно со тие механизми може да се зборува и за механизми од бифуркациона природа.

Нека претпоставиме дека разгледуваме развој на некој процес во зависност од некоја мала (бавна) промена на параметар λ и нека $x(\lambda)$ ја карактеризира неговата стационарна положба (состојба). Во рамнината (x, λ) тоа е некоја крива. Сепак разгледувањето ни дозволува да биде регистрирана не само кривата $x=x(\lambda)$ туку и мала околина во круг околу неа. Според неизбежната стохастичка природа на системот секогаш можеме да се најдеме во околина на стационарната состојба (положба). Таа положба ние ќе ја сметаме за стабилна бидејќи ја разгледуваме само неа. Механизмите кои се последица од законите на физиката и хемијата, а исто така и дарвиновиот природен избор, цело време се стремат да го вратат системот во првобитната стационарна состојба која се променува само како последица на промената на параметарот λ . Во тоа се состои природниот процес на адаптација и развој кој на јазикот на стационарна положба го опишува обичниот еволуционен процес.

Нека сега претпоставиме дека при некоја вредност на параметарот $\lambda=\lambda^*$ има место да се изгуби единственоста за продолжување по параметарот, (бифуркација), и процесот $x(\lambda)$ се дели на процеси $x_i(\lambda)$, $i=1,2,\dots$. Да забележиме дека тоа разгранување се појавува како својство на тие равенки со кои се опишува процесот т.е. на физичките закони кои обезбедуваат минимум диссипација (ресејување) итн. врз основа на кои тие равенки се составени.

Каква е понатамошната судбина на проучувањето на еволуциските процеси? Тоа не можеме принципиелно да го кажеме. Всушност имајќи ја во предвид стохастичноста не можеме ништо да кажеме за тоа во околината, во која од стационарните положби $x_i(\lambda)$ ќе се најде нашиот систем. Множеството возможни патишта на развивање е предопределено со законите на физиката но кој конкретен пат ќе се покаже реализиран ние претходно не можеме да предвидиме. Оттука

следи принципиелното непредскажување и неповторливоста на еволуциониот процес. Да забележиме дека сите дискусии околу конвергенцијата и дивергенцијата кај еволуционите процеси кои се водат скоро цел век, ќе бидат занемарени, ако ние ги земеме во предвид егзистенцијата на бифуркациите и стохастичноста. Непрекинатата дивергенција, непрекинатото растење на разноликоста, тоа е според кажаното општ закон на било кој еволуционен процес.

Значењето на теоријата на разгранување за изучувањето на еволуциски процес демонстрира можности (начини) на нови интерпретации на неговите малку познати и важни особености. Законите на физиката определуваат ограничувања – тоа се брегови на каналите на можниот развој. Вдолж нив произлегува бавната еволуција од дарвинов тип. Пресеците на каналите се точките на бифуркација. Во нивна околина произлегуваат непредвидените брзи промени.

Не помага ни со соодветна интерпретација практички да се објасни отсуството на претходните форми во палеонтолошкиот материјал. Во биологијата тоа ќе биде фразата “првата птица летнала од јајцето на гуштерот”. А можно е да не е виновен гуштерот туку е виновна наредната бифуркација т.е. законот на физиката.

Доста блиску во смисол на проблемите на еволуцијата е проблемот на турбуленција.

Како резултат се добива систем равенки од вид

$$x' = X(x, \lambda)$$

каде x е некој повеќедимензионален вектор. Проучувањето на слоевитото (ламинарното) течење во тој случај ќе биде апроксимирано со решението на равенката $X(x, \lambda) = 0$. Бифуркацијата може да биде најдена од условот

$$X(x, \lambda) = 0, \quad \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right| = 0$$

Понатамошната шема на пресметување исто така се потпира на теоријата на влијанија.

Со други зборови, преминот од ламинатна (слоевидна) состојба во турбулентна, тоа е премин на системот низ точката на бифуркација. Според тоа турбулентното течење може да го разгледуваме како постбифуркациона состојба на системот. Да останеме на тоа малку подетално.

Да разгледаме повторно некоја стабилна стационарна состојба $x(\lambda)$ и да поставиме експеримент при некоја фиксна вредност на параметарот $\lambda = \lambda^*$. Благодарение на стохастичноста на реалниот процес, на експериментот ќе му одговара своја точка $x(\lambda^*)$. Значи во хиперрамнината $\lambda = \lambda^*$ од просторот (x, λ) резултатите на мерење ќе ни дадат некое множество. Со промената на параметарот λ и со забележување секој пат на резултатите на мерењето, ние ќе добиеме некоја тесна цевка.

Нека претпоставиме сега дека во точката $x = x^*$ е произлезено гранење при што произлегуваат многу блиски решенија неразделени меѓу себе со поголеми

потенцијални бариери. Тогаш под дејство на случајни влијанија состојбата на системот ќе преминува од една област на привлекување во друга. Како резултат разгледуваната цела област ќе биде зафатена (пополнета) со траектории на системот. Тој квалитативно нов тип на движење природно се нарекува турбулентно движење.

Кажаното навистина е доволно за да го објасни големиот интерес кон изучувањето на особеностите на трансформациите (пресликувањата) кои моментално се сработуваат не само од математичарите туку и од широк круг на специјалисти кои се занимаваат со содржителна анализа на конкретни појави – механичари, физичари, биолози.

Еволуциони процеси

Да ги проучиме рамнотежните решенија на еволуциони равенки од вид

$$\frac{du}{dt} = F(\mu, u)$$

каде $t \geq 0$ е време, μ параметар, $u(t)$ непозната функција и $F(\mu, u)$ е зададена нелинеарна функција или оператор.

Бифуркационите решенија претставуваат рамнотежни решенија кои образуваат пресечни гранки во соодветен функционален простор. На пример, ако u лежи во R^1 тогаш бифуркационите решенија образуваат пресечни гранки на кривите $F(\mu, u)$ во (μ, u) рамнината. Ако u лежи во R^2 тогаш бифуркационите решенија образуваат сврзани пресеци на површини или криви во тридимензионален (μ, u_1, u_2) простор. Кажуваме дека едно рамнотежно решение се грани од друго при $\mu = \mu_0$ ако постојат две различни рамнотежни решенија $u^{(1)}(\mu, t)$, $u^{(2)}(\mu, t)$ на еволуционата задача, непрекинати во однос на μ и така што $u^{(1)}(\mu_0, t) = u^{(2)}(\mu_0, t)$. Не сите рамнотежни решенија произлегуваат од бифуркации. Во нелинеарните задачи често има изолирани решенија и пресечни гранки на решенија.

Бифуркации и стабилност на стационарни решенија на едnodимензионални еволуциони равенки

Да разгледаме еволуциона равенка во R^1 од вид $\frac{du}{dt} = F(\mu, u)$ каде F има два непрекинати изводи во однос на μ и u . Кај проучувањето на стабилноста и бифуркациите ќе претпоставиме дека $F(\mu, 0) = 0$ за сите реални броеви μ .

Сепак нема да ни треба задоволување на тој услов. Наместо тоа ќе биде потребно рамнотежното решение на диференцијалната равенка, кое е независно од t и го задоволува условот $u = \varepsilon$ и $F(\mu, \varepsilon) = 0$. Проучувањето на бифуркации на

рамнотежните решенија на автономната задача е еквивалентно со проучувањето на стационарните точки на кривите $F(\mu, \varepsilon)=0$ на (μ, ε) рамнината.

Теоремата 5.1 за имплицитна (нејавна) функција се јавува како основен математички резултат кој се користи во теоријата на бифуркации. Во најпроста форма за еднодимензионален случај таа *гласи*:

Нека $F(\mu_0, \varepsilon_0)=0$ и нека F е непрекинато диференцијабилна во некоја отворена област од (μ, ε) рамнината која ја содржи точката (μ_0, ε_0) . Ако $F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) \neq 0$ тогаш постои $\alpha > 0, \beta > 0$ такви што

1) равенката $F(\mu, \varepsilon)=0$ има единствено решение $\varepsilon=\varepsilon(\mu)$, кога $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$, така што $\varepsilon_0 - \beta < \varepsilon < \varepsilon_0 + \beta$.

2) функцијата ε е непрекинато диференцијабилна на $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$,

$$3) \varepsilon_\mu(\mu) = - \frac{F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu))}{F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu))}.$$

Забелешка 5.1: Равенката може да се реши во однос на $\mu(\varepsilon)$ ако $F_\mu(\mu_0, \varepsilon_0) \neq 0$.

Забелешка 5.2: Ако F е аналитичка функција тогаш аналитички ќе бидат $\mu(\varepsilon)$, $\varepsilon(\mu)$.

Забелешка 5.3: Нека претпоставиме дека треба да ја решиме равенката

$$F(\mu, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)})=0$$

во однос на μ . Ако

$$F(\mu_0, \varepsilon_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_0^{(n)})=0 \quad \text{и} \quad F_\mu(\mu_0, \varepsilon_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_0^{(n)}) \neq 0$$

тогаш се задоволени условите од теоремата за имплицитна функција при што

$$\varepsilon_0^{(k)} - \beta_k < \varepsilon^{(k)} < \varepsilon_0^{(k)} + \beta_k, \quad k=1, \dots, n$$

и се добива единствена функција $\mu = \mu(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)})$ во интервалот $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$.

Класификација на точки од криви кои ги исцртуваат решенијата

Во нашето проучување на рамнотежни решенија $F(\mu, \varepsilon)=0$ пожелно е да се воведат следната класификација на точки:

- 1) **Регуларна точка** е точка за која се задоволени условите $F_\mu \neq 0$, или $F_\varepsilon \neq 0$ од теоремата. Ако се задоволени овие услови тогаш може да се најде единствена крива $\mu=\mu(\varepsilon)$ или $\varepsilon=\varepsilon(\mu)$ која минува низ таа точка.
- 2) **Регуларна екстремална точка** е точка во која $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ го менува знакот и $F_\mu(\mu, \varepsilon) \neq 0$.
- 3) **Сингуларна точка** на кривата $F(\mu, \varepsilon) = 0$ е точка во која $F_\mu = F_\varepsilon = 0$.

- 4) **Двојна точка** е сингуларна точка низ која минуваат две и само две гранки $F(\mu, \varepsilon)=0$ кои имаат различни тангенти. Претпоставуваме дека во двојната точка вторите изводи од F едновременно не се еднакви на нула.
- 5) **Сингуларна екстремална (двојна) точка** е двојна точка во која μ_ε го менува знакот кај едната гранка.
- 6) **Точка на враќање** на кривата $\Phi(\mu, \varepsilon)$ е точка на допир од втор ред меѓу две гранки на кривата. Двете гранки на кривата имаат во точката на враќање една иста тангента.
- 7) **Изолирано сингуларно точкасто решение** е решението на равенката $F(\mu, \varepsilon)=0$
- 8) **Сингуларна точка од повисок ред** е сингуларна точка во која сите три втори изводи од F се нула.

Критериум: Нека $D=F_{\varepsilon\mu}^2 - F_{\mu\mu} F_{\varepsilon\varepsilon}$. Ако $D<0$ тогаш точката (μ_0, ε_0) е изолирано точкасто решение. Ако $D>0$ тогаш имаме двојна точка. Ако $D=0$ тогаш имаме сингуларна точка од повисок ред.

Бифуркации во моделите за популации

Биолошките системи по правило се посложени од оние кои се изучуваат во физиката и хемијата. При анализа на моделите пред се почесто се приоѓа избирајќи една од двете можности: или целосно се потпираме на грубата сила на компјутерот, или го упростуваме моделот до таков степен што тој станува биолошки неинтересен. Ситуацијата е таква што многу еколози сериозно го поставуваат прашањето може ли математиката да игра било каква корисна улога во биологијата. Некои констатираат дека за сега нема ни едно фундаментално достигнување (има едно) во биологијата кое било добиено со помош на математичката теорија. Опишувањето на сложени системи, тврдат тие, е подобро со англискиот јазик колку со математичкиот. Типичната позиција на биолозите е таква: моделите се корисни само кога тие објаснуваат што е тоа неразбирливо, или пак претскажуваат нови експерименти. Такви модели тешко се добиваат.

Следејќи ја таа идеја при еколошкото моделирање се разгледуваат бифуркационите појави во три типа модели.

- 1) Популација со дискретен прираст, моделирана со помош на диференчни равенки,
- 2) Непрекинато размножување на популација моделирано со обични диференцијални равенки,

3) Популации со зголемена структура, за чие моделирање треба да се применат парцијални диференцијални равенки или функционално-диференцијални равенки.

Тие три типа модели претставуваат сами за себе три сукцесивни стадиуми (степен) за што поточно пресликување на биолошката реалност, но истовремено и зголемување на математичките тешкотии. На тој начин се поминува од помалку реалистичен модел кој се потпира на строга математичка основа, кон пореалистичен модел заснован на математичка интуиција. Во било кој случај сепак користи од теоријата на бифуркации многу ја надминува нашата можност за цитирање на соодветни теореми.

Равенките од типот ловец-жртва биле искористени од Бел за моделирање на популациите на антитела и антигени во имунолошки одговор.

Со користење на соодветната варијанта на бифуркационата теорема Пимбли покажал дека равенките на Бел имаат периодично решение кое може да се интерпретира биолошки во термини од механизмот на добивање инфекции.

За системи кои се состојат од три и повеќе видови, можноста од бифуркации од повисок ред ги даваат оние проблеми со кои се среќаваме и кај диференцните модели. По првата бифуркација можат последователно (сукцесивно) да произлезат и други бифуркации ако сопствените вредности на трансформацијата на Поанкаре излегуваат од единичната кружница и тогаш повисоките периоди (и аperiodично однесување) на таква диференцна равенка доведуваат до регистрирање на совршено хаотично однесување на бројноста на популацијата. Таа појава доста добро е позната кај хамилтоновите системи. Обично се добива надежна експериментална регистрација на бројни видови многу сложени, па затоа постоењето на такви чудни атрактори може да ја означат експерименталната непроверливост на моделот (не може експериментално да се провери).

Користењето на функционалната анализа во задачите на бифуркација во главно е поврзано со основана можност за сведување задачи со висока дури и бесконечна димензија, на едномерни или двомерни (димензионални) задачи. Тие пак задачи од помала димензија се сврзани со проекции на просторот од сопствени функции а во некои поединечни случаи (соодветни на тие кои произлегуваат од генерирани задачи кои доведуваат кон нарушување на симетријата на бифуркации на стационарни решенија) е потребна анализа на задачи од димензии повеќе од две. Сепак најважни се едно и дводимензионалната проекција. Тие се однесуваат на класата математички задачи наречена бифуркации во едноставно сопствено значење.

Егзистенцијата и структурата на бифуркацијата и стабилноста на бифуркационите решенија комплетно се определуваат при анализата на нелинеарните обични диференцијални равенки или алгебарските равенки кон кои се доведуваат со помош на метод на редукција со користење на проекција. Според тоа надобар едноставен начин е почеток со опишување на задачите со мала

димензија и потоа да се покаже како тие задачи се добиваат при проекцијата на задачи со поголема димензија. Овие строги ограничувања на решение на дводимензионалните задачи (единственост на решение на права и рамнина - пресеци) немаат сила за просторни задачи во кои пресеците на траекториите можат како конечен резултат да генерираат привлекувачко множество со значителна компликуваност (сложеност) ----- (атрактори).

Наведените примери имаат своја цел да го покажат значењето на анализирањето не само на точките на бифуркација туку и потребноста од креирање на ефикасни методи за постбифуркациона анализа. Важен инструмент на изучувањето на зависноста на структурните решенија од параметар се јавуваат методите на продолжен параметар, кои се потпираат на нумеричките методи на решавање на задачата на Коши. Сепак тие методи престануваат да дејствуваат во околина на точките на бифуркација, бидејќи во тие точки произлегува нарушување на единственоста. Значи постбифуркационата анализа потребно бара да се почне со создавање на нумерички методи кои дозволуваат да се најдат сите реални решенија, кои произлегуваат од точката на бифуркација. Но имено овде не пречекува главната тешкотија.

Теоријата на бифуркации е применлива, општо речено, кон нелинеарните задачи не само кога бифуркационите решенија се рамнотежни решенија на еволуционите задачи, туку и во случај на интегрални равенки, нелинеарни алгебарски и функционални равенки, интегро-диференцијални равенки и функционално-диференцијални равенки, особено равенки со закаснување.

Вовед во стабилноста и бифуркации во динамичките системи и флуидната механика

Ќе разгледаме физички систем чија положба x е определена со еволуционата равенка $\frac{dx}{dt} = X(x)$ која има определени интегрални криви. Нека x_0 е рамнотежна точка за системот, т.е. точката за која важи: $X(x_0)=0$. Да замислиме дека изведуваме експеримент врз некој систем во време $t=0$ во кое системот се наоѓа во состојба x_0 . Се поставува прашањето дали ќе можеме точно да ја предвидиме состојбата на системот во некој иден момент. Дали системот во текот на времето ќе остане во истата состојба x_0 или пак неговата состојба ќе се промени?

Иако ни се чини дека одговорот на ова прашање математички лесно може да се најде, сепак експериментите во природата не точно, туку приближно се претставени со нашите идеализирани модели, поради што одговорот на погоре поставеното прашање во општ случај не е позитивен. Како и да е, проучувајќи ја подетално еволуционата равенка, понекогаш можеме да го предвидиме однесувањето на системот во иднина, доколку тој почнал во состојба x_0 .

Со едноставен пример ќе илустрираме дел од овие проблеми. Да ги разгледаме следните две диференцијални равенки:

$$\begin{aligned} & x'(t) = -x(t) \\ \text{и} \quad & x'(t) = x(t). \end{aligned}$$

Решенијата на овие две диференцијални равенки, соодветно, се:

$$\begin{aligned} & x(t) = x_0 e^{-t} \\ \text{и} \quad & x(t) = x_0 e^t. \end{aligned}$$

Сингуларна точка и во двата случаја е координатниот почеток.

Во првиот случај, за сите $x_0 \in \mathbb{R}$ ќе важи: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Ова значи дека интегралните криви ќе се приближуваат кон координатниот почеток, т.е. сингуларната точка и претпоставката дека доколку системот во почетен момент $t=0$ бил во состојба x_0 пак ќе остане во таа состојба, ќе биде оправдана.

Во вториот случај, од податокот дека во време $t=0$ системот е во состојба x_0 , не можеме да заклучиме дека системот ќе остане во таа рамнотежна состојба, бидејќи сите точки освен 0 нагло се оддалечуваат од 0.

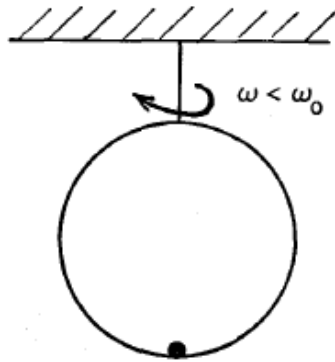
Освен тоа, во вториот случај, нашиот експеримент не ни дозволува да направиме точна петпоставка за $x(t)$, бидејќи ако $x(0)=x_0 < 0$, тогаш $x(t)$ нагло се оддалечува од почетокот кон $-\infty$, но ако $x(0) > 0$, тогаш $x(t)$ се оддалечува од координатниот почеток кон $+\infty$. Значи, ако го разгледуваме овој систем, треба да

очекуваме дека во некој случај ќе важи $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$, а во некој случај $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. Решението $x(t)=0$ за секое t не треба да очекуваме да важи бидејќи и мали промени кај системот може да го нарушат ова решение.

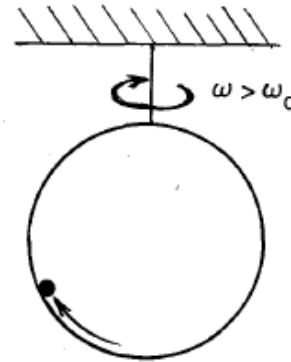
Вакво однесување на системите често се јавува во природата. Тоа не се должи на некои исклучоци во карактерот на решението на диференцијалната равенка што ја разгледуваме, туку на нестабилноста на тоа решение при мали промени на почетните услови.

Навистина, само стабилни математички модели, или делови од модели, се релевантни за опишување на природата.

Да го разгледаме следниот пример: нееластичен обрач е обесен на плафон, а мало топче мирува на дното на обрачот. Обрачот со аголна брзина ω ротира околу вертикална оска која минува низ неговиот центар (цртеж 5.1a).

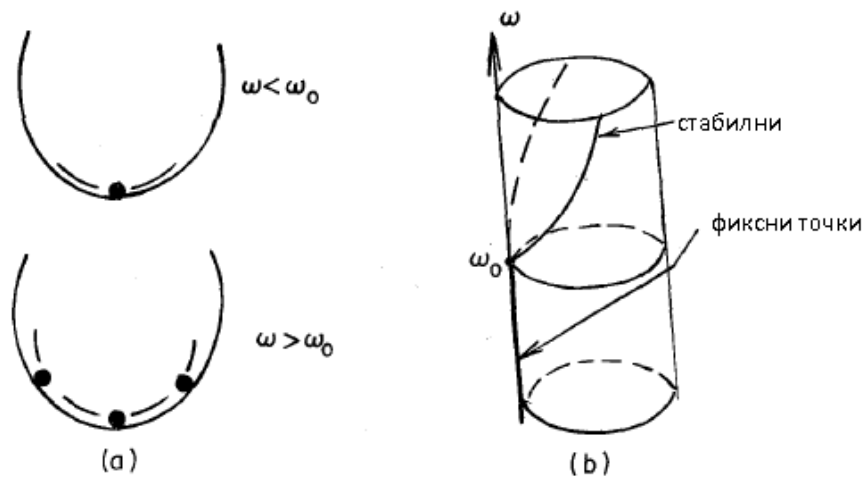


Цртеж 5.1a)



Цртеж 5.1б)

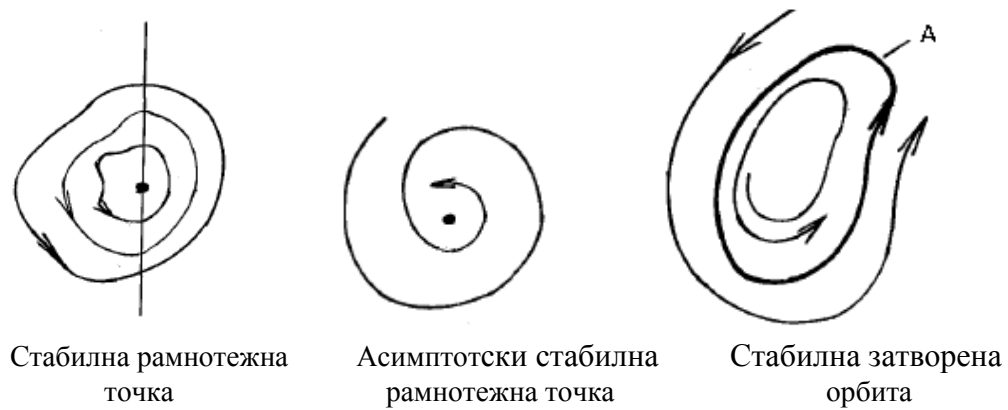
При мала аголна брзина, топчето останува на дното на обрачот, што значи дека неговата состојба е стабилна. Понатаму, при зголемување на аголната брзина ω , кога таа ќе достигне некоја критична вредност ω_0 , топчето ќе почне да се тркала по должината на обрачот до некоја нова положба $x(\omega)$ која за него повторно ќе биде стабилна. Топчето ќе се стркала на лево или на десно, зависно од тоа на која страна од оската ќе биде првично наклонето (цртеж 5.1б). Положбата на дното на обрачот се уште е рамнотежна положба, но во овој случај нестабилна. Решенијата на диференцијалната равенка која го опишува движењето на топчето ќе бидат определени за секоја вредност на ω , но за вредностите за кои $\omega > \omega_0$ истите не претставуваат интерес за нас, бидејќи не можеме да предвидиме на која страна топчето ќе се стркала. Во тој случај велиме дека почетната стабилна рамнотежна состојба станува нестабилна и на некој начин поделена на две стабилни рамнотежни положби (цртеж 5.2). Бидејќи прашањето за стабилност на решението има големо практично значење, ќе го дефинираме коцептот за стабилност и ќе наведеме некои критериуми за определување на стабилност на решението.



Цртеж 5.2

Дефиниција 5.1: Нека $g^t: M \rightarrow M$ е фазен поток со фазен простор M , при што $g^t(x)$ се непрекинати во секоја од точките (t, x) на тополошки простор M и нека A е инваријантно множество во однос на фазниот поток g^t , т. е. множество за кое важи: $g^t(A) \subseteq A$ за секое t . Велíme дека **A е стабилно** (соодветно, **асимптотски стабилно** или **атрактор**) ако за секоја околина U од A постои околина V од A т.ш. кривите на фазниот поток (интегралните криви) $g^t = x(t)$ припаѓаат во U доколку $x(0) = x_0 \in V$ (соодветно, $\bigcap_{t \geq 0} g^t(V) = A$).

Значи, A е стабилно (асимптотски стабилно) кога при мала промена на почетните услови од рамнотежните системот останува во околина на A (соодветно, се стреми кон A) (цртеж 5.3). Доколку A не е стабилно велíme дека е **нестабилно**.



Цртеж 5.3

Наједноставен случај кај кој можеме да ја определиме стабилноста на рамнотежната точка x_0 е конечнодимензионалниот линеарен случај. Нека $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеарен оператор. Фазната крива е дефинирана со решението $x(t) = x_0 e^{tA}$. Јасно, координатниот почеток е рамнотежната точка. Нека $\{\lambda_j\}$ е множеството сопствени вредности на операторот A . Тогаш, $\{e^{\lambda_j t}\}$ е множеството сопствени вредности на операторот e^{tA} . Нека $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ за секое j . Тогаш:

$$\|e^{\lambda_j t}\| = e^{\operatorname{Re} \lambda_j t} \rightarrow 0 \text{ кога } t \rightarrow \infty.$$

Одовде гледаме дека во овој случај координатниот почеток 0 е асимптотски стабилна рамнотежна точка. Доколку постои $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ за некое j , тогаш 0 е нестабилна рамнотежна положба. Во општ случај ја имаме следната теорема.

Теорема 5.1: Нека $A: E \rightarrow E$ е непрекинато линеарно пресликување на Банахов простор E . Координатниот почеток е асимптотски стабилна рамнотежна точка при пресликувањето A ако спектарот на A , $\sigma(A)$ е множество од левата половина на рамнината. Координатниот почеток е нестабилна рамнотежна точка доколку постои сопствена вредност $\lambda_j \in \sigma(A)$ така што $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$.

Сега да разгледаме нелинеарен случај. Нека P е Банахов повеќедимензионален простор и нека v е глатко векторско поле во P . Нека $v(p_0) = 0$. Тогаш: $dv(p_0): T_{p_0}(P) \rightarrow T_{p_0}(P)$ е непрекинат линеарен оператор на Банаховиот простор.

Теорема 5.2: Нека v е глатко векторско поле во повеќедимензионален Банахов простор P и нека p_0 е рамнотежна точка за полето v , т.е. $v(p_0) = 0$. Нека g^t е фазен поток на полето v , т.е. $\frac{\partial}{\partial t} g^t(x) = v(g^t(x))$, при што $g^0(x) = x$ (да забележиме дека $g^t(p_0) = p_0$ за секое t). Ако спектарот на $dv(p_0)$ лежи во левата половина на рамнината, т.е. $\sigma(dv(p_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$, тогаш p_0 е асимптотски стабилна. Ако постои единствено $z \in \sigma(dv(p_0))$ така што $\operatorname{Re} z > 0$, тогаш p_0 е нестабилна. Ако $\sigma(dv(p_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$ и постои $z \in \sigma(dv(p_0))$ така што $\operatorname{Re} z = 0$, тогаш стабилноста не можеме да ја определиме од линеаризираната равенка.

Пример 5.2: Разгледајте го следното векторско поле на рамнината \mathbb{R}^2 : $v(x, y) = (y, \mu(1-x^2)y - x)$. Проверете кога координатниот почеток е стабилна, асимптотски стабилна или нестабилна рамнотежна точка за секој од случаите $\mu < 0$, $\mu = 0$ и $\mu > 0$.

Решение: Согласно условот на задачата, го имаме системот:

$$x' = y, \quad y' = \mu(1-x^2)y - x.$$

Сингуларна точка е координатниот почеток. Бидејќи системот е нелинеарен, после негова линеаризација во околина на координатниот почеток (сингуларната точка),

го добиваме линеарниот систем: $x'=y$, $y'=-x+\mu y$ чија матрица е: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$.

Сопствени вредности на матрицата се $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$. Сопствените вредности на матрицата имаат негативен реален дел доколку $\mu < 0$, што значи дека во овој случај, согласно теоремата 5.2 координатниот почеток ќе биде асимптотски стабилна рамнотежна точка. Сопствените вредности имаат позитивен реален дел ако $\mu > 0$, што значи дека во овој случај рамнотежната точка е нестабилна. Доколку $\mu = 0$, дадениот систем ќе биде линеарен, неговите сопствени вредности имаат реален дел нула што значи дека рамнотежната точка е стабилна.

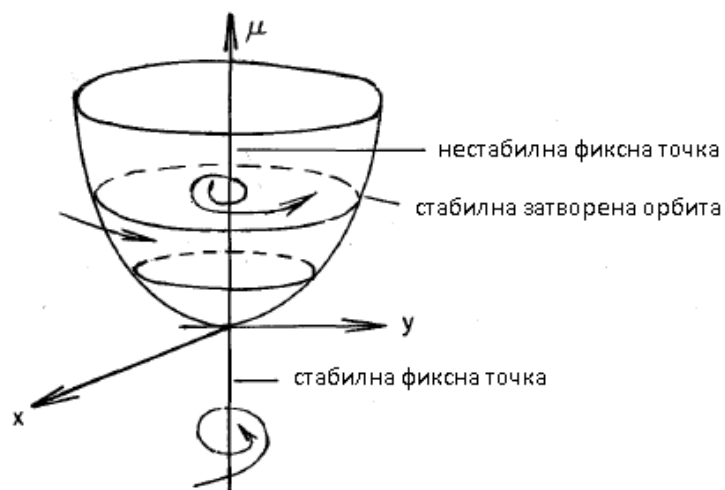
Многу интересни проблеми од областа на физиката се дефинирани со диференцијални равенки кои зависат од параметар, како што е аголната брзина ω кај примерот со топчето во обрач. Нека $v_\mu: P \rightarrow TP$ биде глатко векторско поле во Банахов повеќедимензионален простор. Да претпоставиме дека постои непрекината крива $p(\mu)$ во просторот P , така што $v_\mu(p(\mu)) = 0$, т.е. $p(\mu)$ е рамнотежна точка за полето v_μ . Да претпоставиме дека $p(\mu)$ е асимптотски стабилна за $\mu < \mu_0$ и нестабилна за $\mu > \mu_0$. Точката $(p(\mu_0), \mu_0)$ ќе ја викаме **бифуркациона точка** за полето v_μ . За $\mu < \mu_0$ текот на полето може да се опише (најмалку барем во околина на $p(\mu)$) на тој начин што точките се движат кон $p(\mu)$. Меѓутоа, ова не важи во случајот кога $\mu > \mu_0$, што значи дека карактерот на ова поле може нагло да се промени во μ_0 .

Бидејќи рамнотежната точка е нестабилна за $\mu > \mu_0$, нам не интересира дали ќе најдеме стабилно однесување на системот во случај кога $\mu > \mu_0$. Ова значи дека треба да најдеме бифуркација над критичната точка, која ќе води до стабилно однесување на системот.

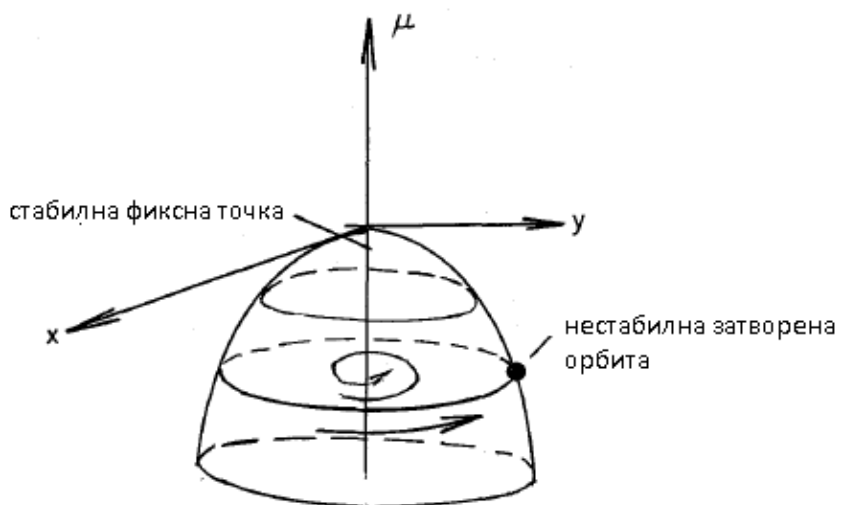
Крива од рамнотежни точки ќе ја викаме кривата $\alpha: I \rightarrow P$ ако за секое μ важи: $v_\mu(\alpha(\mu)) = 0$. Една таква крива очигледно е $\mu \rightarrow p(\mu)$.

Така на пример, повеќе криви од рамнотежни точки може истовремено да доаѓаат до една бифуркациона точка. Може да постојат криви од стабилни рамнотежни точки и во случајот кога $\mu > \mu_0$. Кај примерот со топче во обрачот, постојат две криви од стабилни рамнотежни точки во случајот кога $\omega > \omega_0$; едната ја дефинира движењето на топчето на левата страна во обрачот, а другата движењето на десната страна (цртеж 5.2).

Друг тип на однесување кое може да се појави е бифуркација до периодични орбити. Ова значи дека може да се појават криви од облик $\alpha: I \rightarrow P$ такви што $\alpha(\mu_0) = p(\mu_0)$ и $\alpha(\mu)$ се наоѓаат на затворена орбита γ_μ од векторското поле v_μ (цртеж 5.4). Бифуркации од ваков тип се бифуркациите на Hopf.

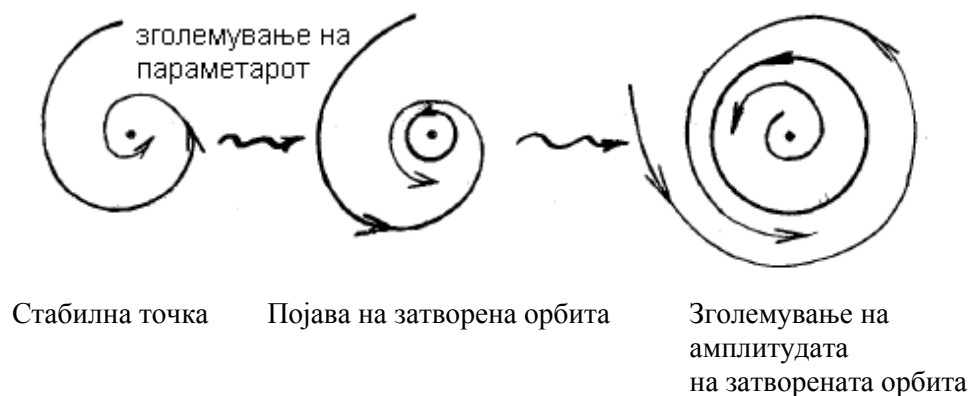


Цртеж 5.4а)



Цртеж 5.4 б)

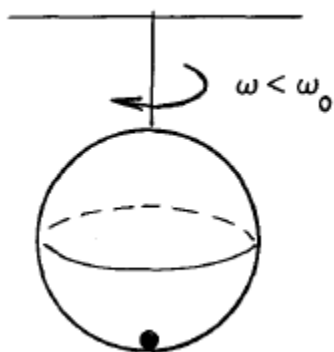
Појавата на стабилни затворени орбити (периодични решенија) е наречена „промена во стабилноста“ од почетното стационарно решение во периодично, т.е. точка која е близу до почетната рамнотежна точка не можеме да ја разликуваме или одделиме од затворените орбити (цртеж 5.4 и цртеж 5.5).



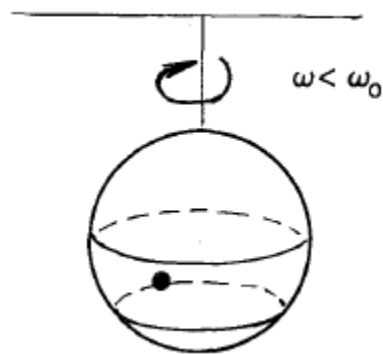
Цртеж 5.5

Друг тип на бифуркации кои може да се појават е на пример случајот кога стабилните затворени орбити во цртеж 5.4 може да се разделат на стабилни 2-торуси. При појавата на симетрија, случајот станува покомплициран. Преку пример ќе илустрираме што може да се појави.

Пример 5.3: Да разгледаме сега топче во внатрешноста на сфера: цврста, нееластична шуплива сфера со мало топче во средината е обесена на плафон и ротира со аголна брзина ω околу вертикална оска што минува низ центарот на сферата (цртеж 5.6).



Цртеж 5.6



Цртеж 5.7

За мали вредности на ω дното на сферата е стабилна точка, но доколку ω надмине некоја критична вредност ω_0 , т.е. $\omega > \omega_0$, топчето ќе почне да се движи по сидот на сферата се додека не постигне нова рамнотежна положба. За секое $\omega > \omega_0$ постои стабилна инваријантна кружница од рамнотежни точки (цртеж 5.7). Во овој случај подобро е да разгледаме кружница од рамнотежни точки, наместо една точка, поради симетријата која постои во разгледуваниот систем.

На кратко ќе ја објасниме општата слика на бифуркационен базен на R. Abraham.

При опишувањето на оваа слика замислуваме брановидна површина по која тече вода. Атракторот (асимптотски стабилната рамнотежна точка) го разгледуваме како базен во кој тече водата. Попрецизно, ако g^t е фазен поток на множеството M и A е атрактор, базенот на A е множеството од сите $x \in M$ кои се стремат (се приближуваат) кон A кога $t \rightarrow \infty$. (За овој пример исто така се користи и помалку сликовитата фраза „стабилно многуобразие“).

Како параметрите се менуваат, површината се бранува, текот на водата се менува. Базените може да се зголемат, да се соединат, може да се формираат нови базени, некои од постоечките може комплетно да исчезнат, може да се појават посложени атрактори, итн.

Бифуркациите на Hopf може да бидат опишани на следниот начин: почнуваме со едноставен базен во форма на параболоид и точка атрактор. Како нашите параметри се менуваат, се појавува мало „ридче“ од вода кое расте, односно се извишува кон центарот на базенот. Новиот атрактор ќе бидат затворени циклуси (имено периодичните орбити во теоремата на Hopf) и базенот во овој случај ќе биде почетниот базен без точката од врвот на ридчето образувано од водата.

Освен тоа, системот може да се усложни со атрактори кои се појавуваат или исчезнуваат кога повишеното ниво се снижува кон базените или базените се извишуваат повисоко.

Многу примери на бифуркации се појавуваат во природата. Бифуркациите на Hopf стојат во позадина на многу осцилации во хемиските и биолошките системи, како на пример треперењето на срцето во состојба на збунетост. Истите се јавуваат и кај многу примери од механиката на флуиди.

МОДЕЛИ НА ЛОРЕНЦ

Во последно време на истражувачите во различни технички области вниманието се повеќе им го привлекува системот равенки:

$$\begin{aligned}x' &= -\sigma(x - y) \\y' &= -xz + rx - y \\z' &= xy - bz \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

познати како **модели на Лоренц**, при што параметрите σ , b и r се позитивни.

Системот е нелинеарен, тродимензионален и на прв поглед детерминиран, но сепак, за определени вредности на параметрите покажува хаотично однесување.

Овој систем е добиен како резултат на равенките на Navier-Stokes во задачите за топлинско струење. Всушност Лоренцовите равенки се идеализација на покомплексен хидродинамички систем од 12 равенки кои опишуваат тубуленции во атмосферата и кои може да опишат многу важни физички појави од атмосферата, па затоа параметрите r, σ и b имаат хидродинамичко значење. Лоренц го истражувал движењето на флуид во резервоар кој се загрева на дното, а лади на горниот дел, што резултира со кружна конвекција при што загреаните честици од флуидот се движат нагоре, а ладните кон дното. При тоа, при мала температурна разлика помеѓу дното и горниот дел од резервоарот честичките од флуидот се движат на начин кој може да се предвиди (детерминистички), но со зголемување на температурната разлика, во некој момент честичките од флуидот ќе покажат хаотично однесување.

Во овој систем координатите x, y и z имаат одредено значење:

x е пропорционално на интензитетот на конвекцијата (има позитивна вредност доколку движењето на честичките од флуидот е во насока на стрелките од часовникот и поголема апсолутна вредност при побрзо струење);

y е пропорционално на температурната разлика помеѓу честичките на флуидот кои се движат нагоре и оние кои се движат надолу;

z е пропорционално на отстапувањето од нормалната температура во резервоарот; вредност 0 одговара на температура која не се разликува од нормалната температура, додека најголема вредност се јавува близу границите на резервоарот.

Што се однесува до значењето на параметрите,

σ е *Prandtl-ов број* кој го означува степенот на вискозност и термалната кондуктивност на флуидот;

r е *Rayleigh-ев број*, параметар кој ја карактеризира температурната разлика меѓу дното и врвот на резервоарот;

b е *коэффициент на системот* кој го мери односот меѓу ширината и висината на слојот на конвекција.

Во системот на Лоренц, како резултат на компјутерски пресметки, во случајот кога $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, установено е сложено хаотично однесување на траекторите, кое укажува на можноста за постоење на нов, фундаментален стабилен режим – стохастички вибрации кои се разликуваат од осцилациите и отчукувањата. Движењата од овој тип се од особен интерес, поради појавувањето на турбуленции.

Постојат и други динамички модели во кои е присутно сложено однесување на траекториите. Така, на пример, на системот (1) се сведуваат некои модели на ласери, модели на диск – динамо, итн. Но, тие не предизвикуваат голема дискусија (внимание) или поради својот тесен фокус, или поради тоа што се откриени сложени однесувања на параметрите во нефизички области, или пак се откриени прекумерно сложени множества во кои се менуваат параметрите придружени со појавување и исчезнување на стабилни периодични движења. Еден од тие системи ние веќе знаеме, тоа се часовниците. Како што е познато, часовниците се целосно динамички системи кои работат или на режимот на осцилации или на режимот на синхронизација. Овде помеѓу многу модели на современи часовници, како пример ќе го земеме часовникот на N. N. Bautin, кој заслужува особено внимание: како што е заклучено од неговата анализа, при определени вредности на параметрите, часовниците имаат таканаречен „стохастички од“. Сепак е неизвесно имаат ли тие часовници некакви предности пред обичните.

Бидејќи од математички аспект стохастичките вибрации и осцилации не можат да бидат стабилни периодични и квазипериодични движења, природно се наметнува прашањето: какви може да бидат овие движења? Мора да кажеме дека на стручњациите за квалитативна теорија на диференцијални равенки добро им се познати примерите за привлечни гранични множества. Множествата на Rayleigh и Takens, чија стабилност се комбинира со нестабилноста на секоја од траекториите посебно, го добиле името **надворешни атрактори**. Но можното појавување на надворешни атрактори во обичните модели на системи останува неразјаснето. Поради ова, природно се наметнува прашањето: можно ли е постоење на надворешен атрактор во моделите на Лоренц? И доколку постои, од каде произлегува и каква е неговата структура?

Во продолжение на кратко ќе наведеме некои од добиените резултати.

Својства на Лоренцовиот систем:

- Равенките се автономни, бидејќи нивните десни страни не зависат од времето t .
- Системот (1) е инваријантен во однос на смената $(-x, -y, z) \rightarrow (x, y, z)$.
- z – оската е инваријантна во смисла да решение кое почнува на оваа оска ($x=y=0$) останува на истата. Освен тоа, решение кое почнува на z – оската се приближува кон координатниот почеток.

- Рамнотежни точки на системот се: координатниот почеток $O(0,0,0)$ и точките $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $O_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ чии координати имаат реални вредности ако $r > 1$. Значи, во случајот кога $0 < r < 1$ системот ќе има само една рамнотежна точка, додека за $r > 1$ постојат три рамнотежни точки.
- Решенијата (траекториите) на Лоренцовиот систем се наоѓаат близу до координатниот почеток, и за конечно време влегуваат во внатрешноста на елипсоид со центар во $(0,0,2r)$. Штом еднаш ќе влезе фазната крива во внатрешноста на елипсоидот, таму и останува. Ваквиот елипсоид претставува така наречено **привлечно множество** или **атрактор на Лоренц**.

Бидејќи равенките во Лоренцовиот систем се нелинеарни, стабилноста на решението во околина на сингуларните точки ќе го анализираме најпрвин линеаризирајќи ги равенките. Функциите од десната страна во системот ги развиваме во околина на сингуларната точка $O(0,0,0)$ во Тајлоров ред, при што нелинеарните членови ги изоставаме. Со тоа го добиваме линеаризираниот Лоренцов систем:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= -bz\end{aligned}$$

Матрицата на системот е: $\begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$. Сопствениите вредности λ_1, λ_2 и λ_3

на оваа матрица ни го дефинираат решението на линеаризираниот систем:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}$$

Слично ги добиваме и решенијата $y(t)$ и $z(t)$, при што коефициентите c_1, c_2, c_3 ги добиваме од почетните услови. Сопствениите вредности на матрицата се:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_2, \lambda_3 = \frac{1}{2}(-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r})$$

Во случајот кога $r > 1$ на исти начин правиме линеаризација на системот и во останатите две сингуларни точки, при што како сопствени вредности ги добиваме решенијата на карактеристичната равенка

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

Сега кога веќе ги знаеме сопствените вредности на матрицата на системот лесно можеме да го напишеме обликот на решението во околина на сингуларните точки. Сепак, нас повеќе не интересира стабилноста на решението во околина на сингуларните точки, отколку обликот на самото решение. Знаејќи го обликот на сопствените вредности, сега можеме да ја дискутираме и стабилноста на решението.

Доколку постојат комплексни сопствени вредности, $\lambda_2, \lambda_3 = a \pm bi$ (комплексните сопствени вредности секогаш се јавуваат во коњуигирани парови) решението го добива обликот:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{at} \cos(bt) + c_3 e^{at} \sin(bt)$$

Ако сопствените вредности се реални и негативни, тогаш решението ќе се приближува до нулата со текот на времето и линеаризираното решение ќе биде стабилно.

Ако сопствените вредности бидат реални и помеѓу нив има позитивни, тогаш решението ќе се оддалечува од координатниот почеток, т.е. истото ќе биде нестабилно.

Ако постојат коњуигирано-комплексни сопствени вредности тогаш решението на линеаризираната равенка осцилира. Ако реалниот дел на комплексните корени е негативен, осцилациите се пригушуваат со тек на времето и решението станува стабилно. Доколку реалниот дел е позитивен, осцилациите се зголемуваат и линеаризираното решение е нестабилно. Ако реалниот дел е 0, решението е периодично.

Сега се поставува прашањето дали стабилноста на нелинеарниот систем се совпаѓа со стабилноста на линеарниот. Бидејќи нелинеарниот и линеаризираниот систем во околина на стационарната точка (во која функциите се развиваат во Тајлоров ред) се однесуваат скоро исто, тогаш и нивната стабилност ќе биде скоро секаде иста.

Сликата за формирање на структурата на фазовиот простор на системот (1) и неговата поделба на траектории ќе ја опишеме менувајќи ја вредноста на r во интервалот $(0, 28]$. Притоа ќе земеме дека $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

1. Ако $0 < r < 1$ постои само една рамнотежна состојба на системот, координатниот почеток. Во овој случај сопствените вредности ќе бидат реални, негативни и различни, што значи дека координатниот почеток е стабилна рамнотежна состојба. Таа ги „привлекува“ фазните криви, т.е. фазните криви се приближуваат кон оваа рамнотежна точка.
2. Кога $r > 1$ две од сопствените вредности на системот во околина на координатниот почеток се реални и негативни, но едната од нив е позитивна, што значи дека во овој случај координатниот почеток ќе биде нестабилна рамнотежна точка.

Ќе ја разгледаме стабилноста и на останатите две сингуларни точки која ја дефинираат сопствените вредности на равенката

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

3. Кога $1 < r < 470/19 \approx 24.74$ двете стационарни точки имаат сопствени вредности со негативен реален дел. Во овој случај сингуларните точки ќе бидат стабилни. Всушност, сопствените вредности се реални за $r < 1.346$ и комплексни во останатите случаи, што значи дека за вредности на r поголеми од 1.346 решението ќе почне да осцилира.
4. Во случај кога $r > 470/19 \approx 24.74$ двете стационарни точки имаат по една реална, негативна сопствена вредност и две комплексни сопствени вредности со позитивен реален дел, што значи дека овие две рамнотежни положби на системот се нестабилни. Всушност, во овој случај сите три стационарни точки се нестабилни.

Критичната вредност $r^* = 470/19 \approx 24.74$ е добиена врз основа на формулата

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

Квалитативните промени во однесувањето на решението на системот при промена на параметрите, како што веќе знаеме, се познати како бифуркации. Во овој систем бифуркации се појавуваат:

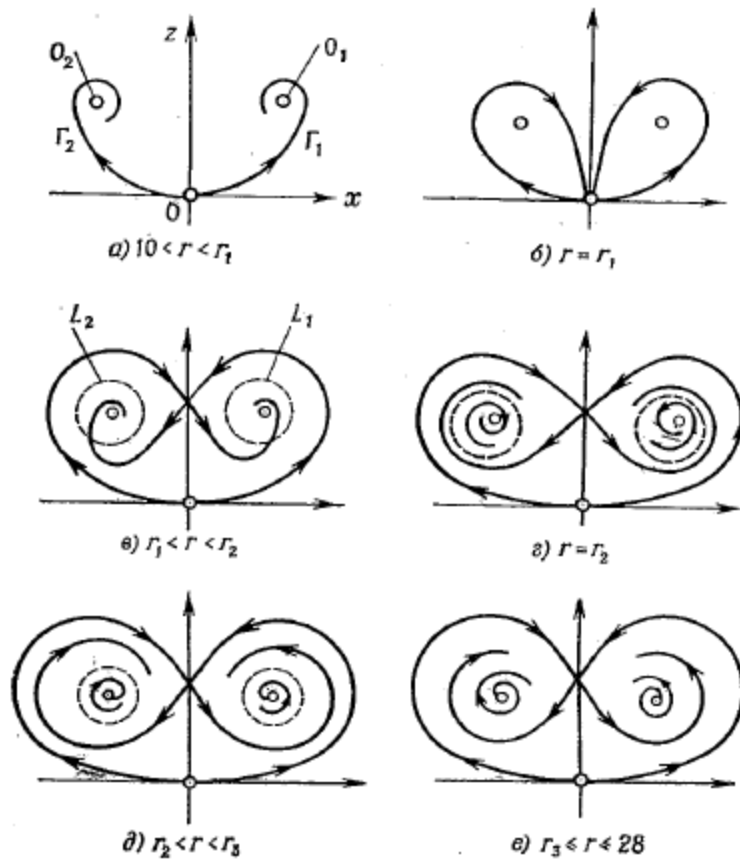
- кога $r=1$, т.е. за вредноста на параметарот кога координатниот почеток поминува од стабилна во нестабилна рамнотежна точка, и се појавуваат уште две стационарни точки.
- кога $r=r^*$, т.е. за вредноста на параметарот кога останатите две стационарни точки од стабилни стануваат нестабилни.

Ќе ги разгледаме и следниве случаи:

5. Кога $r \in [10, r_1]$, каде $r_1 = 13.92$ системот има три рамнотежни состојби: координатниот почеток $O(0,0,0)$, O_1 и O_2 при што O се јавува како седло, со дводимензионално стабилно инваријантно многуобразие W^s и две траектории Γ_1 и Γ_2 кои ќе ги нарекуваме сепаратриси. Едната од нив, нека тоа биде Γ_1 , се стреми кон стабилната рамнотежната состојба O_1 , а другата, Γ_2 , кон O_2 (цртеж 5.8а).
6. При $r = r_1$, секоја од сепаратрисите Γ_1 и Γ_2 се стреми двојноасимптотски кон седлото O (цртеж 5.8б). При преминот на r преку r_1 околу секоја од рамнотежните точки O_1 и O_2 започнува периодично движење L_1 и L_2 .

Точките O_1 и O_2 ќе бидат стабилни гранични множества (множества точки од кои не се оддалечуваат траекториите). Ваква ситуација ќе се јави и кога $r \in (r_1, r_2)$, каде $r_2 \approx 24,06$, но Γ_1 сега ќе се стреми кон O_2 , а Γ_2 кон O_1 (цртеж 5.8в).

7. Во случајот кога $r = r_2$ имаме појава на бифуркации. Овој случај се карактеризира со тоа што, ако порано Γ_1 и Γ_2 влегуваа во стабилни фокуси O_2 и O_1 , сега при $r = r_2$, Γ_1 и Γ_2 се стремат кон седлови периодични движења L_2 и L_1 соодветно (цртеж 5.8г).
8. Во случајот кога $r \in (r_2, 28]$ системот има стабилно гранично множество Ω_2 , кое ги има својствата:
 - Ω_2 се јавува структурно стабилно. Ова е поврзано, особено со тоа што седлото O припаѓа на областа Ω_2 заедно со своите сепаратриси Γ_1 и Γ_2 .
 - Периодичните движења се секаде густе во Ω_2 и се од типот на седло.
 - Во Ω_2 се наоѓаат траектории кои се шират експоненцијално, што е карактеристично за системи со мешан и непрекинат спектар.
 - Исчезнувањето на периодичните движења при промена на r е можно само доколку тие влезат во траекторија која излегува од седлото O .
 - Во интервалот (r_2, r_3) , каде $r_3 \approx 24,74$, во фазниот простор постојат три стабилни атрактори: Ω_2 , кој е наречен атрактор на Лоренц и рамнотежните состојби O_1 и O_2 (цртеж 5.8д). На граница на областа на привлекување на атракторот на Лоренц се јавуваат стабилни периодични движења L_1 и L_2 .
 - Кога $r \rightarrow r_3$ периодичните движења L_1 и L_2 се пригушуваат кон рамнотежните состојби O_1 и O_2 , кои при $r = r_3$ се стабилни, што води кон можноста за појава на стохастичност.
 - Кога $r \in (r_3, 28]$ стабилноста на решенијата се губи, единствено стабилно гранично множество се јавува Лоренцовиот атрактор (цртеж 5.8е). За $r = 28$ системот покажува хаотично однесување.

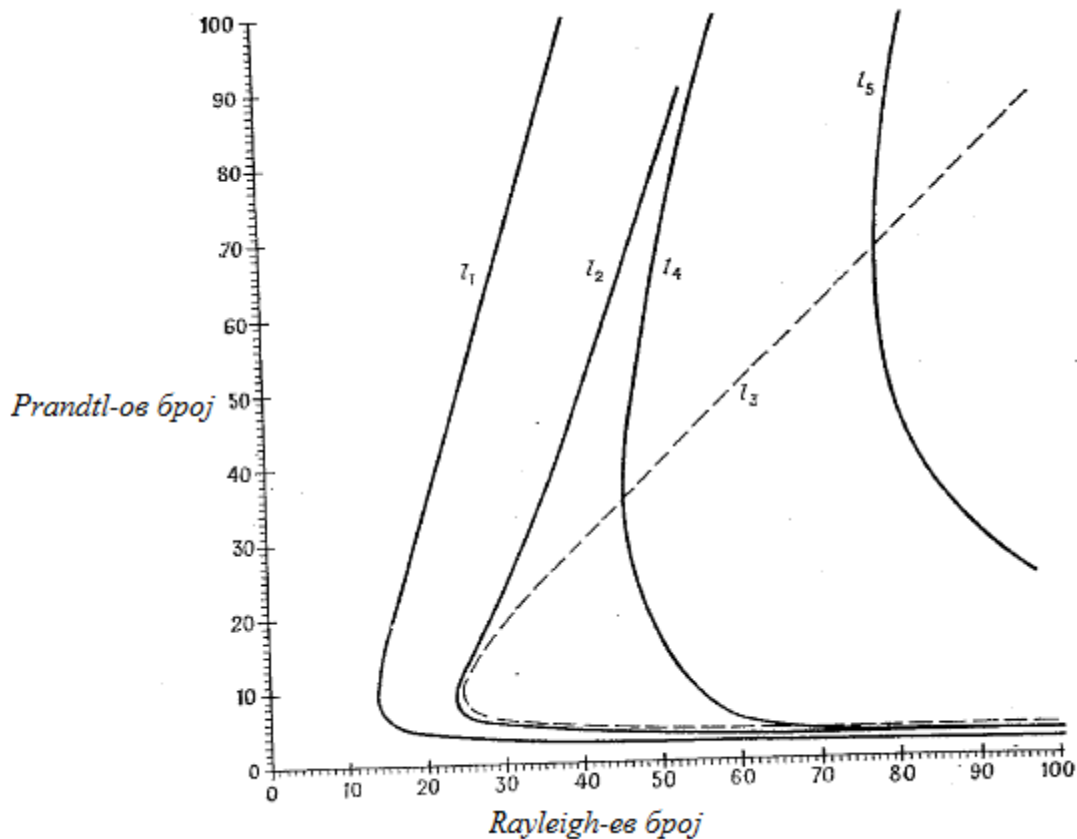


Цртеж 5.8

Решенијата на Лоренцовите равенки се многу осетливи на промена на дадени почетни услови. Ова значи дека и многу мала промена на некоја од вредностите во почетните услови, може да доведе до решение чија траекторија значително се разликува од траекторијата на решението при дадените почетни услови.

Доколку $r = r_2$ се појавува како граница на интервалот на стабилност на Ω_2 , тогаш при $r \leq r_2$ сликите на точките се оддалечуваат од околината на Ω_2 . Нов стабилен режим ќе биде или O_1 или O_2 . На овој начин добиваме дека $r = r_2$ се јавува како точка на динамички неопределена критична граница на областа на стабилност на Лоренцовиот атрактор.

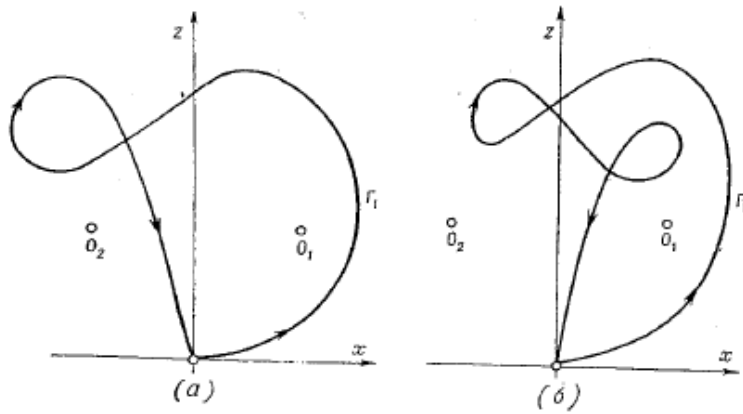
Да забележиме дека поврзаноста на бифуркациите со вредноста на бифуркационите параметри ја забележале Јорк и Каплан.



Цртеж 5.9

На цртеж 5.9 се прикажани неколку бифуркациони криви на системот (1) во правоаголникот: $0 \leq r \leq 100$, $0 \leq \sigma \leq 100$, во случај кога $b = \frac{8}{3}$. На овој цртеж недостасува кривата $l_0 : r = 1$, чиј тек соодветствува на појавата на траектории од O , кон двете стабилни рамнотежни состојби O_1 и O_2 . Кривите l_1 , l_4 и l_5 соодветствуваат на постоење на траектории околу седлото O во системот (1).

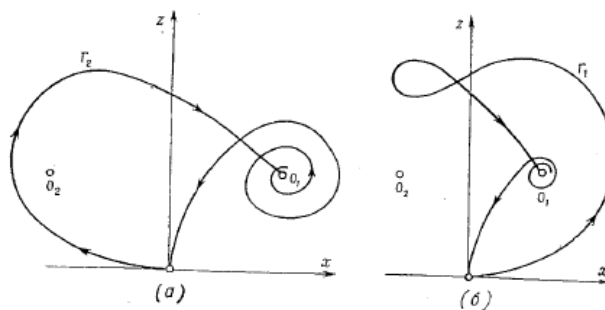
Квалитативниот поглед на деловите од траекторијата Γ_1 проектирани на рамнината xz во случајот l_1 се прикажани на црт.5.8 б), во случајот l_4 на цртеж 5.10 а), а во случајот l_5 на цртеж 5.10 б). Одовде, при премин преку l_i , $i = 1, 4, 5$ ќе се појави периодично движење од типот на седло, чие инваријантно многуобразије во случаите l_1 и l_5 има облик на цилиндар, а во случајот l_4 има облик на Мобиусов лист. Кривата l_2 одговара на моментот кога Γ_1 и Γ_2 личат на стабилни многуобразија од кои произлегуваат периодични движења (цртеж 5.8г). При преминот преку l_2 се појавува и атракторот на Лоренц.



Цртеж 5.10

Кривата l_3 е добро позната: $r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$. Во овој случај O_1 и O_2 ја губат стабилноста. Покажано е и дека l_3 се јавува како критична граница на областа на стабилност. Да забележиме дека l_3 не може да ги сече кривите l_1 и l_2 , додека кривата l_4 ја сече во две точки.

Покрај опишаните криви, постојат и други криви кои одговараат на различните текови на сепаратрисите, но со многу посложен карактер од кривите Γ_i . Како што следува од теоретските разгледувања, во некои области кои се приближуваат кон l_2 , тие криви образуваат преброиво секаде густо множество. На некои од тие криви им е придружена бифуркациона точка $Q_{10}(30,4;10,2)$ (од множество со димензија два), која соодветствува на контурата од седлото O и O_1 (O_2) и траекториите што ним им соодветствуваат, од кои една е Γ_2 (Γ_1) (цртеж 5.11a).



Цртеж 5.11

Постои уште една бифуркациона точка $Q_{20}(85;11,9)$, која одговара на контурата од седлата O и O_1 (O_2) и траекториите кои се со нив поврзани, од кои една е Γ_1 (Γ_2) (цртеж 5.11б), која е најдена со помош на нумерички експеримент.

Слични случаи на бифуркации теоретски разгледувал и В.В Биков од каде знаеме дека постои преброиво множество од бифуркациони точки Q_{ij} , $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \dots$, кое соодветствува на структурно стабилни контури на сепаратриса од таков тип, но со многу посложено однесување од Γ_1 и Γ_2 и кон тие точки се доближуваат бифуркационите криви l_{ij} , кои одговараат на деловите на сепаратрисите кај седлата O_1 и O_2 . А ова води кон важен заклучок, постоење на стабилни периодични движења.

Ќе кажеме неколку зборови околу докажување на својствата на Лоренцовиот атрактор Ω_2 . Наведена е еднопараметарска фамилија системи X_μ кои имаат рамнотежни состојби од типот на седло O , чија еднодимензионална сепаратриса при $\mu = 0$ се враќа кон него. Би требало системот да има пресечна област, на која е определен приказ $T(\mu)$. Поради присуство на седло, $T(\mu)$ ќе биде неkontинуирано. Имено, тоа својство на $T(\mu)$ овозможува релативно едноставно да се формулираат условите при кои ќе постои надворешен атрактор. Одовде произлегува прашањето: можно ли е да ги провериме овие услови за моделите на Лоренц?

Но, за аналитичките својства на T_1 , кои се потребни, практично ништо и неможе да се каже. Поради тоа, проверката на теоретските услови кај моделите на Лоренц се врши компјутерски.

Заклучок

Од наведеното досега гледаме дека многу методи и техники на теоријата на бифуркации нашле своја примена при изучување на моделите на Лоренц. При нивно разгледување забележуваме дека имаме различни, но од порано познати типови на бифуркации: бифуркации со рамнотежни состојби и периодични движења, бифуркации чии сепаратриси и нивни контури се со едно или две седла, како и со седло и периодично движење итн. Но и моделите на Лоренц со себе поставиле пред теоријата на бифуркации доста нови прашања, при што на некои од нив одговорот е расветлен, но и сеуште се трага по решение на некои од нив. Овде треба особено да подвлечеме внимание на следниот факт, кој се јавува во резултатите од истражувањето на моделите на Лоренц, но останувајќи далеку во рамките на даден конкретен случај: *надворешните атрактори можат да се појават од нестабилни гранични множества*. Природно е да тој практично важен исход, не може да не поколеба во таа вкоренета претстава да преминот од прости движења во сложени мора да е придружен со некои слаби бифуркации.

Литература:

- [1] E.L.Ince, “ Ordinary differential equations” Dover Publications, Inc. New York.1956.
- [2] Schroeder M., “ Fractals, Chaos, Power Laws” W.H.Freeman and Co. ,New York, 1991.
- [3] J.C.Spott,”Chaos and Time-Series Analysis” Oxford Univ. Press, 2003.
- [4] G.Ioss, D.D.Joseph, “Elementary Stability and Bifurcation Theory” , Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.
- [5] J.E.Marsden, M.McCracken, “ The Hopf Bifurcation and its applications”, Springer- Verlag, New York, 1976.
- [6] А.И.Арнольд, “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, Наука, Москва, 1984.
- [7] V.I.Arnold, “Dynamical Systems V, Bifurcation Theory and Catasrophe Theory”, Springer, 1993
- [8] Steven H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos”, Perseus book, Massachusetts, 1994
- [9] Brin M., Stuck G., “Introduction to Dynamical Systems”, University Press, Cambridge, 2002
- [10] Hassan K. Khalil, “Nonlinear Systems”, Department of Electrical and Computer Engineering, Michigan State Untvesity, 2002.
- [11] V.I.Arnold, “Ordinary Differential equations”, MIT, 1978.
- [12] Shankar Sastry, “Nonlinear Systems, Analysis, Stability and Control”, Springer, 1999
- [13] Б. Пиперевски, Е. Аспровска, М.Николовска, „За една еднопараметарска група линейни трансформации“, Семинар по диференцијални равенки „Струмица 2010“, 2010
- [14] Е. Аспровска, Б. Пиперевски, „За стабилност на решението на една класа линейни автономни системи “, Семинар по диференцијални равенки „Струмица 2010“, 2010
- [15] Е.Гелова, Б.Пиперевски, Е.Аспровска, М.Николовска, За еден варијационен проблем од електротехника и неговиот соодветен контурен проблем